В. И. Лебедев.

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ ТОЧНЫХ НАУК.

ВЫПУСК ПЕРВЫЙ.

КТО ИЗОБРЕЛ АЛГЕБРУ?

ПЕТРОГРАД.
4-я Государственная типография, Фонтанка, 57.
1919.

ОТ АВТОРА.

Юному любителю математики я прежде всего посвящаю свой труд.

Пусть помнит он теперь уже старую истину: „Если мы о чем-нибудь не знаем, как оно образовалось, то и не поймем его".

История дает возможность понять душу науки, вливая в нее жизнь и глубоко вскрывая ее сущность.

Являясь лучшей школой для воспитания творчества, история побуждает к нему — и уже потому имеет огромную ценность для общего образования.

Пусть юный читатель, знакомясь с „биографией" той самой науки, которую он изучает в средней школе, как определенный предмет, часто как нечто ограниченно застывшее, глубже проникнет в сущность точной науки и пусть полюбит ее.

И пытливый учитель найдет в этой книге много для себя полезного.

Давно известная истина: „Воспитание ребенка как по характеру своему, так и по расположению должно соответствовать воспитанию человечества в его историческом развитии" — может быть одинаково приложена также и к обучению.

Существует много методов преподавания.

Метод, который выработали не отдельные авторы, а создало само собой все человечество — метод исторический —

уже потому, что это *естественный* метод, заслуживает особенного внимания.

Нужно ли говорить о том, какое значение имеют в деле воспитания биографии великих ученых — подвижников науки? Или — история изобретений и открытий?

Наша русская литература не богата сочинениями по истории математики, физики и астрономии. Книги для юных читателей с рассказами по истории алгебры, насколько автору известно, нет даже в мировой литературе.

Не будучи авторитетом-специалистом по истории, составитель этих очерков сознает, конечно, что мог сделать много промахов. Он надеется однако, что строгая критика и указания товарищей помогут ему в последующих выпусках лучше осуществить намеченные им цели: возбудить у юных любителей математики и физики интерес к изучению творений великих ученых и изобретателей, а также дать учителю материал из истории математических наук, который способствовал бы оживлению методов преподавания.

При составлении этих очерков автор пользовался преимущественно иностранными источниками.

В одном из ближайших выпусков будет указана литература.

Вас. Лебедев.

1. „Алгебра“.

В 820-м году один из ученых при дворе халифа Аль-Мамуна, *Мухаммед-ибн-Муса-Аль-Хваризми* написал трактат, который начинался таким предисловием:

„Любовь к наукам, которую вселил Бог имаму Аль-Мамуну, повелителю правоверных, внимание и предупредительность к ученым, доброта, с какою он их поддерживает, и помощь, которую он им оказывает при случае, когда они стремятся раз'яснить темные места в науках и сделать понятными трудные вопросы, — все это заставило меня написать краткое сочинение о вычислениях при посредстве *„aljebr w' almukabalah“* („альджебр-в-аль-мукабала“).

О происхождении этого метода, носящего двойное название *„aljebr w' almukabalah“*, автор ничего не говорит, считая его, повидимому, общеизвестным. Метод этот, как мы сейчас увидим, связан с процессом решения уравнения.

Арабский математик XVI столетия Бега Еддин термины „aljebr w' almukabalah“ об'ясняет так: „Та часть уравнения, в которой находится отрицательная величина, может быть дополнена, а к другой—прибавлено нечто равное тому, что дополняет первую часть; такое действие называется „aljebr“. Подобные и равные члены в обеих частях могут быть отброшены—это действие носит название „almukabalah“.

Один персидский математик излагает этот метод даже в стихах:

„Аль-джебр“.

При решении уравненья,
Если в части одной,
Безразлично какой,
Встретится член отрицательный,
Мы к обеим частям,
С этим членом сличив,
Равный член придадим,
Только с знаком другим,—
И найдем результат нам желательный.

„Аль-мукабала“.

Дальше смотрим в уравненье,
Можно-ль сделать приведенье,
Если члены есть подобны,
Сопоставить их удобно.
Вычтя равный член из них,
К одному приводим их.

Как мы видим, метод Аль-Хваризми сводится к тому, что из уравнения:

$$3x - 7 = 2x - 5$$

по aljebr'у можно написать, прибавив к обеим частям 5 и 7:

$$3x + 5 = 2x + 7.$$

Далее, по методу „almukabalah“, сопоставляя $3x$ и $2x$, 5 и 7, мы можем вычесть из обеих частей $2x$ и 5, придав уравнению вид $x = 2$.

Таким образом названпе „алгебра“ (aljebr) связано с процессом решения уравнения и впервые встречается у арабских ученых не позднее IX столетия.

Было бы, однако, ошибочно заключить отсюда, что алгебру изобрели арабы.

2. Роль арабов в истории математики.

В истории математики роль арабов—исключительная.

Малокультурная и малонаселенная теперь Аравия знала лучшие времена. Было время, когда в руках арабов был весь торговый путь от Атлантического океана до Китая, когда арабский язык являлся международным языком для торговых сношений на всем этом пространстве, а торговый арабский флот обслуживал все Средиземное море и рынки Азии. Это было в VIII веке и конце IX в., во времена халифата *Омоядов* и *Абассидов*. Дамаск и главным образом Багдад являлись тогда центром обширной торговли арабов. Арабские товары шли в Китай, в Россию, в Швецию, в Западную Европу. Ковры, роскошные тонкие изделия из золота и других драгоценных металлов, духи, усовершенствованная бумага являлись главными предметами торговли арабов. Производство всех этих продуктов требовало специального знания. И нам известно, что при Абассидах были основаны во всех уголках государства школы, где обучались молодые арабы чтению *Корана*, священной книги магометан, математике, естествознанию и т. п.

Если учение ислама и не является зерном, из которого выросла позднейшая культура арабов, все же заслуга его в том, что оно не ставило этому никаких преград. Мечети были местом, где арабское юношество изучало не только богословие, слушало толкование Корана, но знакомилось здесь и с науками. И эта свободная арабская наука дала плоды, которыми долго потом питались Восток и Европа.

Арабская медицина долго служила источником врачебных знаний в Европе. Арабы первые из европейцев начинают употреблять компас [1]).

Халифы устраивают целую коллегию переводчиков древних рукописей. Появляются на арабском языке творения Евклида, Аполлония, Архимеда, Птоломея. Арабы быстро усваивают греческую культуру и математику; однако, дальше подражания они не идут. Успехи их в математике состояли исключительно в решении частных вопросов. Арабы, изучая классические произведения греческой науки, были подавлены гением своих учителей. Чем больше изучали они творения греческих математиков, тем более эллинизировались их воззрения на ее основные принципы.

В истории математики заслуга арабов двоякая.

С одной стороны, они сохранили нам творения многих греческих писателей во времена, когда все языческое отвергалось и уничтожалось, когда само название „математика" стало чуждо и вызывало неподходящие представления. Как известно, один из законов Юстинианова кодекса носил название „De maleficiis, mathematicis et caeteris similibus" [2]) и гласил: „Ars autem mathematica damnabilis interdicta est omnino" [3]).

Вследствие дороговизны письменного материала, нередко монах-переводчик старательно очищал пергамент от чертежей Евклида или Архимеда, чтобы написать рассуждение по вопросу о каком-либо догмате церкви. Много погибло таким образом творений древних авторов. Арабы спасли их от уничтожения, и впоследствии их переводы являлись нередко единственным источником, по которому можно было восстановить некоторые сочинения древней науки.

Другая заслуга арабов в истории алгебры и арифметики—усвоение на ряду с творениями греческих математиков также творений другого талантливого народа—индусов. Математика арабов—механическое соединение некоторых индусских приемов с методами греческих математиков.

---

[1]) Компас употреблялся раньше арабов у китайцев.

[2]) „О злодеях, математиках и тому подобных".

[3]) Совершенно воспрещается достойное осуждения математическое искусство

Постоянные торговые сношения с китайскими, индусскими и греческими купцами на рынках всего Средиземного моря имели благоприятные последствия. Арабы быстро усвоили, как западную, так и восточную науку.

Давая очерк истории алгебры, нам и придется, с одной стороны, раскрыть то, что принадлежит в ранней арабской математике грекам, с другой—выяснить роль индусов в развитии алгебры.

3. Алгебра у древних греков. Диофант.

В одном из очерков мы узнаем, где и как зародилась наука геометрия; мы познакомимся также с ее историей. Знаменитым „*Началам*“ Евклида [1]) будет посвящен отдельный очерк.

Мы увидим тогда, до какой степени своеобразна была древнегреческая геометрия. В Англии до сих пор в школах элементарная геометрия изучается по Евклиду.

Геометрия русской средней школы во многом отличается от „Начал“ Евклида. Изучению геометрии предпосылается обыкновенно алгебра, и доказательства многих теорем носят чисто алгебраический характер.

Не так было в истории математики.

Первые шаги алгебра сделала, когда геометрия уже вылилась в определенную форму. До середины IV века по Р. Х. нам неизвестно на греческом языке ни одного трактата, более или менее похожего по своему содержанию на то, что принято называть алгеброй. Между тем „*Начала*“ Евклида написаны около 300 г. до Р. Х. [2]).

Первые проблески алгебраического решения задач мы встречаем у греческого математика Диофанта.

Когда жил Диофант—точно неизвестно.

Есть основание думать, что его сочинения написаны в IV столетии по Р. Х. Все, что мы знаем достоверно о Диофанте—это, что он женился 33-х лет, имел сына и умер 84-х лет.

---

[1]) Евклид, живший в III в. до Р. Х., завершил своими „*Началами*“ работу своих предшественников. В течение целого ряда столетий „*Начала*“ были единственным руководством по геометрии в школах. По ним учились знаменитые математики: Паскаль, Ферма, Декарт, Лейбниц, Ньютон и др.

[2]) В древнейшем математическом памятнике—египетском папирусе Ахмеса—имеются задачи, похожие на уравнения 1-ой степени. Неизвестныя наз. „*хау*“ или „*куча*“. Встречаются символы для обозначения сложения, вычитания и равенства.

Дело в том, что до нас дошла следующая эпитафия:

„Здесь погребен Диофант, и камень могильный
При счете искусном расскажет нам,
Сколь долог был его век.
Велением Бога он мальчиком был шестую часть своей жизни.
В двенадцатой части затем прошла его светлая юность.
Седьмую часть жизни прибавим—пред нами очаг Гименея.
Пять лет протекло, и прислал Гименей ему сына.
Но горе ребенку! Едва половину он прожил
Тех лет, что отец, как скончался, несчастный.
Четыре года страдал Диофант от утраты той тяжкой
И умер, прожив для науки. Скажи мне,
Скольких лет достигнув, смерть восприял Диофант?“

Из этой эпитафии можно составить уравнение:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x,$$

откуда определить, „скольких лет жизни достигнув, смерть восприял Диофант?“ $x = 84$.

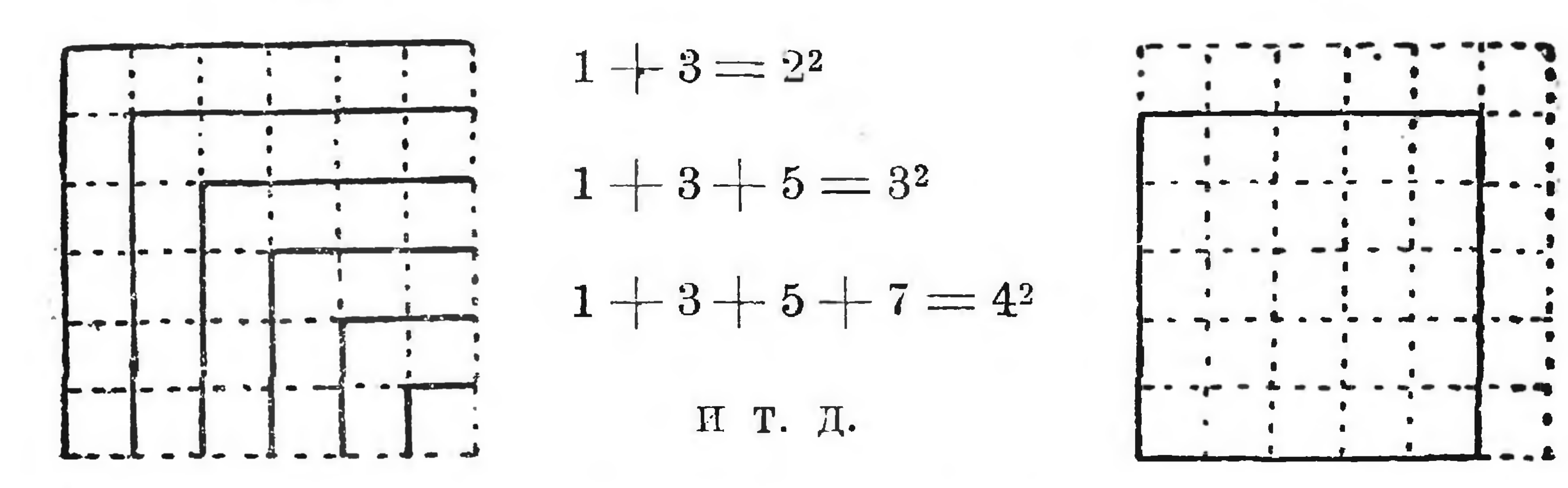
Главное произведение Диофанта *„13 книг Арифметики“* [1]) К сожалению, до нас дошли только 6 книг.

Если бы сочинения Диофанта не были написаны по-гречески, нельзя было бы подумать, что это произведение греческого ума. Диофант, в отличие от Евклида, Пифагора и других выдающихся математиков древней Греции, производит вычисления без посредства геометрии.

Между тем то, что теперь проходится в алгебре, Пифагор доказывал геометрически. Отрезки или квадратики играли роль букв

Например, он доказывал геометрически свойства чисел:

1. Сумма натурального ряда нечетных чисел есть точный квадрат.



Фиг. 1. Если принять квадрат за единицу, то ясно, что прибавлением нечетного числа мы всегда получаем квадрат.

Фиг. 2. Разность двух квадратов есть нечетное число [2]).

---

[1]) Προβλημάτων ἀριθμητικῶν βιβ. ιγ.

[2]) Пифагор нечетные числа наз. гномами.

2. Всякое нечетное число есть разность двух квадратов.

$$2^2 - 1^2 = 3$$
$$3^2 - 2^2 = 5$$
$$4^2 - 3^2 = 7$$
$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

Первое из этих свойств целых чисел, открытых Пифагором, можно алгебраически доказать, если знать, как находить сумму членов арифметической прогрессии.

Действительно, натуральный ряд n нечетных чисел:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + (2n-1)$$

представляет арифметическую прогрессию, с разностью 2.

Чтобы определить сумму n членов, надо взять полусумму крайних и помножить на число членов, т. е.

$$\frac{1 + (2n-1)}{2} \text{ помножить на } n.$$

Ответ получится n^2.

Второе свойство легко доказать, раскрывая скобки. В самом деле

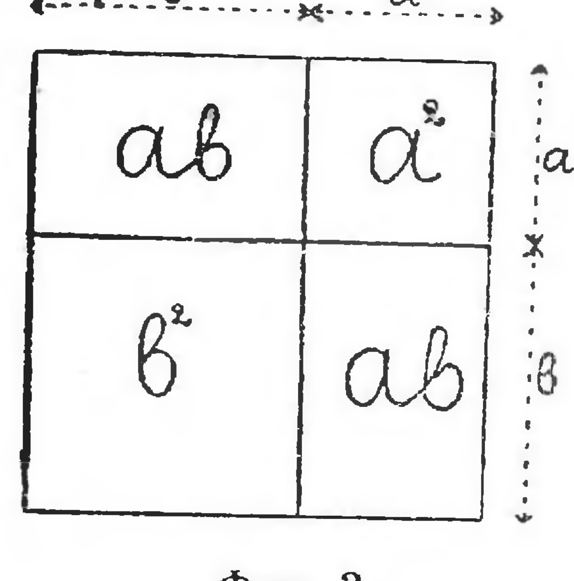
$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2$$

что дает

$$2n+1$$

— нечетное число.

„Алгебра“ [1]) знаменитого Евклида носит также геометрический характер.



Фиг. 3.

Например, хорошо известное нам тождество:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

он доказывает геометрически. Площадь всего квадрата (фиг. 3) можно вычислить либо возводя в квадрат сторону $(a+b)$, либо составляя его из четырех фигур $ab + a^2 + b^2 + ab$. Отсюда

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2.$$

Как решаются квадратные уравнение, мы проходим теперь на уроках алгебры. Евклид решает квадратные уравнение вида:

$$ax - x^2 = b$$
$$ax + x^2 = b$$

1) Обращаем внимание читателя, что слово алгебра стоит в ковычках. В действительности Евклид не написал сочинения по алгебре.

геометрически [1]) **Так, например, во II-ой книге (предложение 11) Евклид** решает задачу:

„Разделить данную прямую $AB (= a)$ на такие две части (x и $a - x$), чтобы прямоугольник, заключенный между целою прямою AB и одной из ее частей [т. е. $a \cdot (a - x)$] был равновелик квадрату (т. е. x^2), построенному на другой ее части“.

Таким образом построение требует, чтобы

$$a\ (a - x) = x^2$$

или

$$x^2 + ax = a^2$$

Как мы видим, решение этой задачи равносильно определению корня квадратного у—ния [2]).

Евклид жил около 300 г. до Р. Х. Уже 22 века прошло, как решены квадратные уравнения!

Диофант, в отличие от своих предшественников, выводит формулы алгебры, как это делаем мы теперь:

$$(2x - 3)\ (2x - 3) = 4x^2 - 12x + 9.$$

Он пользуется даже нашим правилом знаков при умножении отрицательных количеств:

„Отнимаемое число (λεῖψις), говорит Диофант, будучи умножено на отнимаемое, дает число прибавляемое (ὕπαρξις)“

т. е. $$(-3) \cdot (-3) = +9.$$

Диофант уже пользуется символами, обозначая неизвестное буквами.

Уравнения
$$10x + 30 = 11x + 15$$
$$x^2 = 4x - 4.$$

он записывает:

ςς^{οί} ἄρα $\overline{ι}$ μ^{ο} $\overline{λ}$ ἴσοι εἰσὶν ςς^{οῖς} $\overline{ια}$ μονάσι $\overline{ιε}$

δύναμις ἄρα $\overline{α}$ ἴση ςς^{οῖς} $\overline{δ}$ λεῖψει μ^{ο} $\overline{δ}$ [3]).

---

1) См. очерк „Древнейший учебник геометрии“.

2) Решение этой задачи по Евклиду дано в вып. IV, гл. 1.

3) Неизвестное число задачи обозначается ς с ударением: ς′ (наше x). Для обозначения $4x$ употребляется ςς $\overline{δ}$ (сопровождая падежным окончанием).

δύναμις (сокращенно $\overline{δυ}$) означает x^2;

μονάδες (сокращенно $\overline{μο}$) означает „единица“;

λεῖψει (сокращенно ψ) означает „минус“;

$\overline{ι} = 10$; $\overline{λ} = 30$; $\overline{ια} = 11$; $\overline{ιε} = 15$; $\overline{δ} = 4$.

Диофант умел решать кв. у—ние, но в дошедших до нас книгах он нигде не об'ясняет способа решения. В одном месте своего сочинения он говорит: „Впоследствии я покажу, как решаются задачи, если (после преобразования) получаем два члена, равные одному". Очевидно, Диофант подразумевает у—ние $ax^2+bx=c$. К сожалению, это обещание не выполнено по отношению к нам: соответствующая часть книги утеряна.

Вот один из примеров „алгебры" Диофанта:

„Найти два числа, которых сумма 20, а разность квадратов 80".

Решение Диофанта. Обозначим искомые числа:

$$x+10 \text{ и } 10-x$$

квадраты этих чисел будут:

$$x^2+20x+100;\ x^2+100-20x$$

Разность квадратов: $40x$

по условию задачи:

$$40x=80,$$

откуда $x=2$.

Современное решение. Обозначим искомые числа: x и $20-x$. Тогда согласно условию задачи:

$$(20-x)^2-x^2=80.$$

Откуда

$$400-40x=80$$

пользуясь „аль-джебр"—ом, имеем:

$$320=40x$$

или

$$x=8.$$

Как мы видим Диофант удачным выбором обозначения искомых чисел получает сразу простое у—ние. Это составляет отличительную черту всех решений.

Диофант об'ясняет, как можно преобразовать у—ния, чтобы привести их к простейшему виду. „Если в какой-либо задаче,—говорит он,—в обеих частях у—ния встречаются неизвестные одной и той же степени, то мы должны вычитать подобные из подобных, пока не получим одного члена [1]). Если в одной части или в обеих частях

---

[1]) Это—то, что арабы называли „аль-мукабала".

есть члены с отрицательными коэффициентами, то эти члены должны быть прибавлены к обеим частям так, чтобы в обеих частях были только положительные члены [1]). Затем снова нужно отнимать равные от равных, пока не останется только один член".

Таким образом по Диофанту у—ние

$$8x - 11 - 2x + 5 = x - 4 + 3x + 10$$

должно решаться так: прибавляем к обеим частям по $2x$, по 11 и по 4, чтобы избавиться от отрицательных членов.

$$8x + 5 + 4 = x + 3x + 10 + 11 + 2x$$

или

$$8x + 9 = 6x + 21$$

отнимаем от обеих частей по $6x$ и по 9

$$8x - 6x = 21 - 9$$

или

$$2x = 12.$$

Диофант—единственный греческий математик, написавший трактат по алгебре.

В заключение нашего обзора греческой алгебры необходимо отметить, что европейские математики (итальянцы, французы, германцы, англичане и русские) познакомились с алгеброй не через Диофанта. Для нас он оказался только косвенным учителем через арабов.

4. Индусская математика.

При изучении истории математики неоднократно приходится убеждаться, что развитие ее идет далеко не равномерно: то замедляясь, то быстро подвигаясь вперед. В то время, как одни народы стоят во главе умственного движения человечества, другие оказываются далеко сзади, едва вышедшими из первобытного состояния. Когда у последних в силу каких-либо благоприятных причин появляются стремления к приобретению знания, они должны прежде всего догнать передовые племена. Если в свою очередь эти передовые племена, достигнув полного расцвета, вырождаются и падают, в умственном развитии

---

[1]) У арабов эта операция впоследствии называлась „аль-джебр".

всего человечества наступает застой. Но всегда на смену является другой народ, который продолжает начатое дело. Именно VI век можно считать крайним пределом, замыкающим историю математики у греков. Греческая математика пережила три главных периода: период усвоения знаний (у египтян, индусов и вавилонян), период расцвета самостоятельной деятельности и, наконец, период упадка и умственного вырождения.

Повидимому, математическая работа должна была остановиться и, может быть, на долгое время.

Но здесь выступает другой высоко одаренный народ—индусы.

Благодатный климат Индии—этой „страны чудес", необыкновенное плодородие почвы и богатство окружающей природы имели громадное влияние на мировоззрение индусов. Индия (Индостан)—по величине равная Европейской России — представляет настоящую тропическую страну; даже север ее обладает очень теплым январем, на юге температура остается почти без изменения целый год. Нуждаясь в очень немногом, живя в богатой природе, индус всегда интересовался гораздо более миром не материальным. Это не был житель земли, думающий об удобствах, о хорошо обставленной жизни; наоборот, это был созерцатель, философ, думающий о сущности вещей, о своей душе. Этот народ философ, создавший две больших религии: брахманизм и буддизм, давший ряд удивительных по красоте литературных произведений, оказался нашим косвенным учителем в области арифметики и алгебры. Правда, индусы не имели непосредственного влияния на европейских ученых, так как их исследования сделались известными нам только в начале XIX столетия. Все же, если под алгеброй подразумевать приложение арифметических действий к сложным величинам всякого рода, будь то отрицательные или положительные, иррациональные или рациональные, то *индусов следует признать истинными изобретателями этой науки.*

К сожалению, мы не можем проследить историю индусской алгебры, т. к. все сочинения, дошедшие до нас, представляют индусскую науку в законченном виде.

Алгебра индусов имеет интересные особенности.

В то время как греки ставили все в зависимость от формы, так что даже чисто арифметические предложения получали геометрический характер, индусы обращали внимание на одни только числа, и геометрия их составляла часть арифметики, как это видно из оглавления сочинения Баскары.

Индусы больше ценили результат, чем обоснование исследования.

В то время как греки пользовались строго логическими построениями при доказательстве, индусы придерживались интуиции, на-

I. Лилавати [1]).

Гл. 1. Таблицы мер протяжения, веса и денег.

Гл. 2. Сложение. Вычитание. Умножение. Деление. Возвышение в квадрат. Извлечение кв. корня. Возвышение в куб. Извлечение куб. корня. Дроби.

Гл. 3. Правила, как производить действие в обратном порядке. Фальшивое правило. Правила отыскивания чисел. Тройное правило.

Гл. 4. Правило процентов и товарищества. Покупка и продажа. Правило смешения.

Гл. 5. Арифметические и геометрические ряды.

Гл. 6. Плоская геометрия.

Гл. 7.—10. Измерение об'емов.

Гл. 11. Тень гномона.

Гл. 12. Решение неопред. у-ний в целых числах.

Гл. 13. Соединения. Размещения и сочетания.

II. Виаганита [1]).

Гл. 1. 36 действий над плюсом и минусом над нулем, неизвестным, несколькими неизвестными и иррациональными количествами.

Гл. 2. Неопределенные у-ния 1-ой степени.

Гл. 3. Неопределенные у-ния 2-ой степени.

Гл. 4. У-ния 1-ой степени с одним неизвестным.

Гл. 5. У-ния 2-ой степени с одним неизвестным.

Гл. 6. У-ния со многими неизвестными.

Гл. 7. Неопределенные у-ния 2-ой степени.

Гл. 8. У-ния вида: $ax + by + c = xy$.

Гл. 9. Заключение.

---

[1]) „Лилавати“ значит „Красивая“, „Виаганита“—„Извлечение корней“. Эти два сочинения представляют введение к астрономическому сочинению Баскары.

Краткое содержание алгебраического сочинения Баскары
1145 г. по Р. Х.

глядности, симметрии. Чертеж и слово: „смотри“ считались достаточными [1]).

В отличие от греков, индусы пользуются **отрицательными числами**. Разницу между положительным и отрицательным числом индусы обозначали стрелками, направленными в противоположные стороны.

В сочинении Брамагупт: *Cuttacad'hyaya* 620 г. по Р. X. мы читаем:

„Сумма двух „**имуществ**“ есть „**имущество**“; сумма двух „долгов“—„долг“; сумма „имущества“ и „долга“ равна их разности, если же они равны, то она есть нуль“.

„Сумма нуля и „долга“ есть „долг“; сумма „имущества“ и нуля—„имущество“; сумма двух нулей есть нуль....

„Долг“, вычитаемый из нуля, становится „имуществом“, а „имущество“—„долгом“.

„.... Если нужно вычесть „имущество“ из „долга“ или „долг“ из „имущества“, то берут их сумму“.

Переводя это на язык алгебры, мы получим:

$\overset{+}{3}$	$+$	$\overset{+}{4}$	$=$	$\overset{+}{7}$
имущество		имущество		имущество
$\overset{+}{5}$	$+$	$\overset{-}{2}$	$=$	$\overset{+}{3}$
имущество		долг		имущество
$\overset{-}{2}$	$-$	$\overset{+}{3}$	$=$	$\overset{-}{5}$
долг		имущество		долг
$\overset{-}{3}$	$+$	$\overset{-}{4}$	$=$	$\overset{-}{7}$
долг		долг		долг
$\overset{+}{2}$	$-$	$\overset{-}{3}$	$=$	$\overset{+}{5}$
имущество		долг		имущество

Отрицательными числами индусские математики пользовались при решении уравнений, при чем вычитание заменялось сложением равнопротивоположного числа (точка на верху).

Решая, например, у—ние

$$\text{yâ va } 0 \text{ yâ } 10 \text{ rû } \dot{8}$$
$$\text{yâ va } 1 \text{ yâ } 0 \text{ ru } 1$$

что значит: [2])

$$0x^2 + 10x - 8 = x^2 + 0x + 1$$

---

[1]) См. очерк: „Кто автор первых теорем геометрии?“.

[2]) yâ (сокращ. слова yâvattâ vat—„столько-сколько“) обозначало неизвестное. rû (сокращ. слова rû ракâ—„монета“)—известное. vâ (сокращ. слова vagra)—вторая степень.

Брамагупта пишет:

$$\text{rû } \dot{9}$$

$$\text{yâ va 1 yâ } 1\dot{0}$$

это значит

$$-9 = x^2 - 10x$$

Все изложение индусских математиков носит мистически-поэтический характер. Задачи, например, в сочинении Баскары (1141—1225 г. по Р. X.) предлагаются в стихотворной форме [1]), причем содержание заимствуется из окружающей природы Индии, полной красоты и поэзии.

Задача о лотосе. [2])

Над озером тихим с полфута размером
Высился лотоса цвет.
Он рос одиноко. И ветер порывом
Отнес его в сторону. Нет
Боле цветка над водой.
Нашел же рыбак его ранней весной
В двух футах от места, где рос.
Итак, предложу я вопрос:
Как озера вода
Здесь глубока?

Задача о тополе. [3])

На берегу реки рос тополь одинокий.
Вдруг ветра порыв его ствол надломал.

---

[1]) На Востоке вообще было принято излагать научные сочинения в стихах для лучшего запоминания. Эта стихотворная форма была распространена на Западе в XVI, XVII и даже XVIII столетии. В нашей арифметике Магницкого все правила изложены стихами. Немцы поэтические лотосы индусов заменили трактирными счетами за выпитое вино и пиво. (Ващенко-Захарченко, стр. 477.)

[2]) Вот решение этой задачи:

Обозначим искомую глубину озера через x фут. Тогда длина лотоса будет $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ фут. Когда ветер порывом отнес лотос в сторону, можно представить себе прямоугольный треугольник, которого гипотенуза $x+\frac{1}{2}$, катеты 2 и x. Читателю предлагаем самому сделать чертеж. Пользуясь теоремой Пифагора: „квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов", имеем: $(x+\frac{1}{2})^2 = x^2 + 2^2$.

По раскрытии скобок, член x^2 в обеих частях уничтожится, и мы имеем простое уравнение первой степени. „Озера вода здесь глубока" на $3^3/_4$ фута.

[3]) Эта задача решается очень просто, если изобразить ее условие на чертеже. Применяя теорему Пифагора имеем:

$$\begin{pmatrix}\text{длина}\\ \text{сломанной}\\ \text{верхушки}\end{pmatrix}^2 = 3^2 + 4^2;$$

Откуда длина сломанной верхушки равна 5, а высота тополя $5 + 3 = 8$ (фут.).

Бедный тополь упал. И угол прямой
С теченьем реки его ствол составлял.
Запомни теперь, что в том месте река
Лишь в 4 фута была широка.
Верхушка склонилась у края реки.
Осталось 3 фута всего от ствола.
Прошу тебя скоро теперь мне скажи:
У тополя как велика высота?

Задача о пчелках. [1]

Есть кадамба цветок;
На один лепесток
Пчелок пятая часть опустилась.
Рядом тут же росла
Вся в цвету симендга,
И на ней третья часть поместилась.
Разность их ты найди,
Трижды их ты сложи,
На кутай этих пчел посади.
Лишь одна не нашла себе места нигде,
Все летала то взад, то вперед и везде
Ароматом цветов наслаждалась.
Назови теперь мне,
Подсчитавши в уме,
Сколько пчелок всего здес собралось?

Индусским математикам было известно, что квадратное уравнение имеет два решения. Так, Баскара при решении „задачи об обезьянах" дает два решения: 48 и 16.

Задача об обезьянах.

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась;
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько ты мне скажешь
Обезьян там было в роще?

---

[1]) Решить эту задачу в уме, как требует индусский метематик, довольно трудно. Зато при помощи уравнения она решается очень легко. Обозначив искомое число пчел через x, составляем уравнение:

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+3\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{5}\right)+1=x$$

Откуда $x=15$.

Вот решение задачи:

Если число всех обезьян x, то согласно условию задачи:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

или

$$x^2 - 64x + 768 = 0;\ x_1 = 48;\ x_2 = 16$$

У Баскары мы находим два замечательных тождества [1]), вошедшие почти во все наши школьные руководства по алгебре

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$$

Появление этих тождеств [2]) об'ясняется тем, что индусские математики в противоположность грекам не замечали различия между соизмеримыми и несоизмеримыми числами. У них иррациональные числа и отрицательные числа подвергались тем же действиям, что и целые числа.

Поступая так инстинктивно и не подозревая о пропасти между прерывным и непрерывным, положительным и отрицательным, индусы являются в этом отношении истинными изобретателями алгебры.

Если вглядеться в оглавление сочинения Баскары „*Виаганита*", мы не заметим большого различия в сравнении с учебником по алгебре нашей средней школы. Разница будет заметна только при чтении самой книги. В индусской алгебре—символов мало. Задачи исключительно числовые. Доказательства отсутствуют.

Потребовалось несколько столетий, прежде чем алгебра приняла настоящий свой облик.

5. Некоторые особенности арабской математики.

В начале этого очерка было уже указано, что арабы в области математики—ученики греков и индусов. Следы влияния этих двух народов можно видеть, читая первый арабский трактат по алгебре—Мухаммеда-ибн-Мусы Аль-Хваризми.

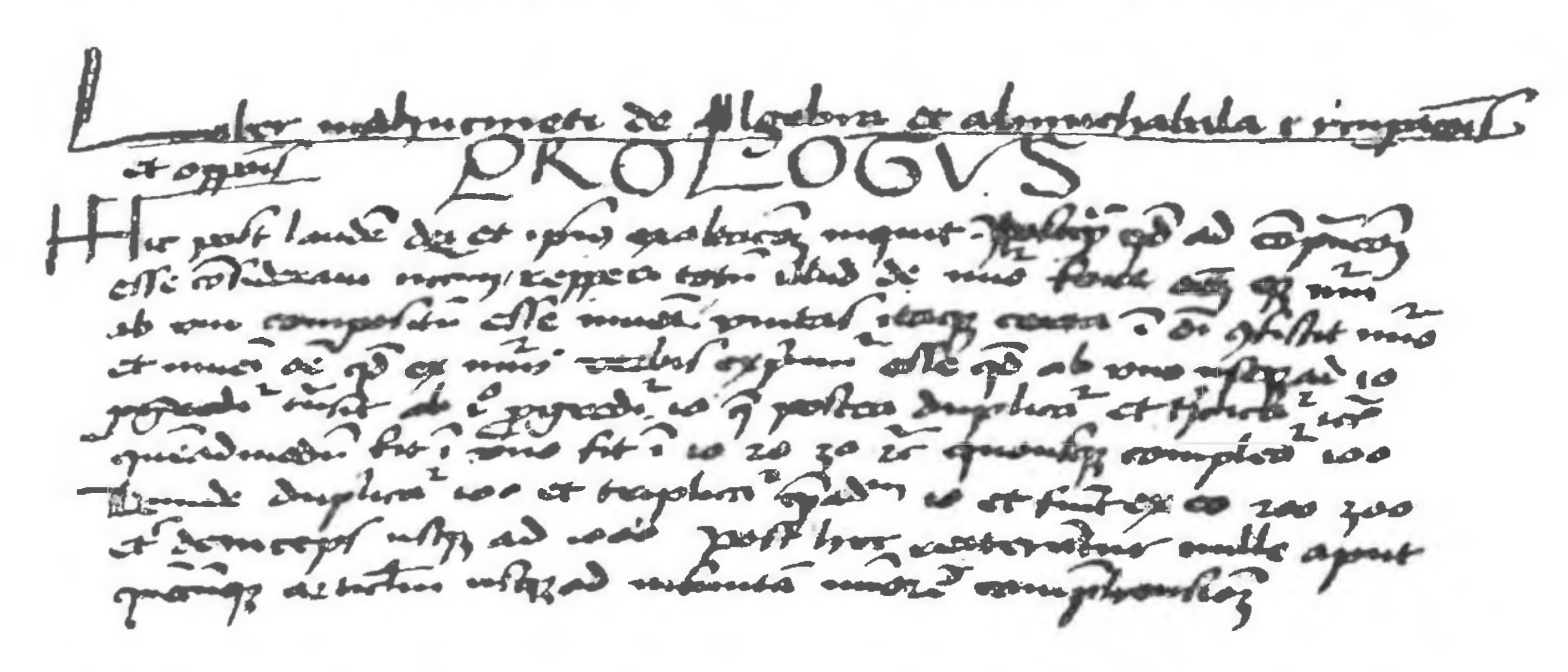
---

[1]) Конечно, запись этих тождеств была отлична от нашей.

[2]) Для доказательства этих тождеств достаточно обе части возвести в квадрат.

С интересным предисловием этого сочинения мы уже знакомы.

Теперь нам необходимо рассмотреть содержание этого сочинения, чтобы выяснить некоторые особенности арабской алгебры.



Первые строки рукописной алгебры на латинском языке (1456 г.).

Неизвестное Аль-Хваризми наз. „*schai*“ — шай, что значит „вещь“ [1]), его квадрат „*mal*“ (маль)—„имущество“.

Правила сложения, вычитания и умножения алгебраических выражений, т.-е. многочленов, содержащих неизвестное и квадрат его, раз ясняются на частных примерах.

Никаких символических знаков и формул Аль-Хваризми не употребляет. Уравнения и их решения описываются словами. В этом отношении алгебра арабов делает шаг назад сравнительно с индусской и даже греческой.

Хорошо знакомый с индусским способом изображения чисел и их методами вычисления при сложении, умножении и делении, Аль-Хваризми подобно Диофанту не рассматривает отрицательных чисел и при решении у—ний пользуется правилом Диофанта [2]). Однако, в противоположность Диофанту, Аль-Хваризми признавал два корня в квадратном уравнении и допускал иррациональные решения.

Вместо одного кв. у—ния $ax^2 + bx + c = 0$, как это мы делаем теперь, подразумевая под a, b и c любые числа, он рассматривает шесть типов:

1. Один квадрат равен корням: $x^2 = ax$
2. Один квадрат равен числу: $x^2 = a$
3. Корни равны числу: $ax = b$

---

[1]) Название неизвестного „schai“ напоминает египетское „хау“ (см. стр. 8). Впоследствии это название было переведено на латинский яз.—„res“, итальянский яз.—„cosa“.

[2]) Правила эти, как мы видели, похожи на aljebr w'almucabalah.

4. Один квадрат и корни равны числу: $x^2 + ax = b$
5. Один квадрат и одно число равны корням: $x^2 + a = bx$
6. Корни и одно число равны одному квадрату: $ax + b = x^2$

Все эти шесть случаев поясняются на частных примерах.

Напр., Альхваризми рассматривает уравнение:

$$x^2 + 21 = 10x \text{ (5-ый тип) } [1].$$

Интересно, что кв. уравнения решаются алгебраически и геометрически.

Алгебраическое решение.

Раздели пополам число корней . . .	получишь	5
Умножь это число на самого себя .	„	25
Вычти из него число 21	„	4
Извлеки квадратный корень	„	2
Этот корень прибавь или вычти из половины числа корней	„	3 и 7.

Все эти операции укладываются в формулу:

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21}$$

Если бы было дано буквенное у—ние $x^2 + q = px$ (один квадрат и одно число равно корням), то перевод решения на алгебраический язык дал бы нам формулу:

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Геометрическое решение.

Уравнение типа $x^2 + px = q$:

$$x^2 + 10x = 39 \text{ (4-ый тип).}$$

Мухаммед Аль-Хваризми решает геометрически двумя способами.

Один из них:

Пусть AD представляет значение x и $ABCD = x^2$; продолжим [2] DA и DC так, чтобы

$$AH = CF = 5 \left(\text{т.-е. } \frac{p}{2}\right).$$

---

[1]) Перевод этого уравнения на арабский способ записи был бы таков: Один квадрат и 21 в числах равны десяти корням“.

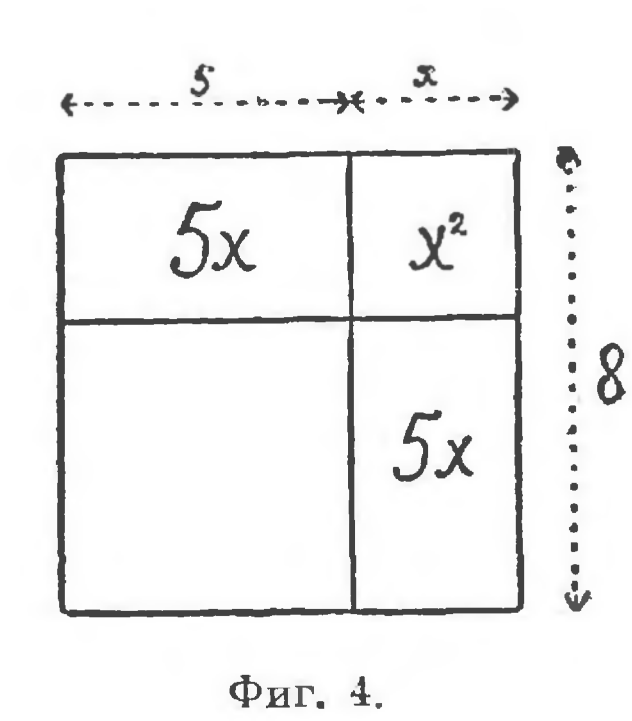
[2]) При чтении рекомендуется на чертеже фиг. 4. расставить буквы: H, A, K; K, B, C; внизу справа Q, F.

Строим прямоугольники *AHKB* и *CFQB*, площадь которых $5x$, а вместе они дают $10x$. Таким образом фигура *HADCFQBK* графически представляет $x^2 + 10x$.

Сколько нехватает до полного квадрата? Конечно, 25 $\left(\text{т.-е. } \frac{p^2}{4}\right)$.

Полный квадрат равен $39 + 25$, т.-е. 64

$$DH = 8;\ x = 8 - 5;\ x = 3.$$



Фиг. 4.

Если облечь решение в алгебраическую форму, то оно примет вид:

$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = 8\ ^{1)}$$

$$x = 3.$$

Или в общем виде:

$$x^2 + px = q$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4}$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

То же уравнение $x^2 + 10x = 39$ арабский ученый Аль-Кархи (1010 г.) решает, пользуясь теоремой Евклида.

Фиг. 5.

Пусть $CB = x$ (фиг. 5) D есть середина AB, и $AC = x + 10$,

$$AB = 10 \qquad AC \,.\, CB = (x + 10)x$$

---

[1]) Правильнее было бы написать ± 8.

На основании предложения Евклида[1]) (Кн. II, предл. 6)

$$AC \cdot CB + DB^2 = DC^2$$

или

$$(x + 10) \cdot x + 25 = DC^2$$

т. к. $(x+10)x = 39$, то $DC^2 = 64$ и $DC = 8$.

Так. обр. для решения алгебраических у—ний согласно Аль-Кархи, надо было знакомиться с Евклидом, т.-е. геометрию изучать раньше алгебры.

Другой арабский ученый, написавший алгебру, Аль-Хаями (1080 г.), даже в предисловии говорит:

„Настоящее сочинение может быть понято только теми, которые основательно знакомы с „*Началами*“ и „*Данными*“ Евклида, а также с первыми книгами „*Конических Сечений*“ Аполлония. Незнакомые с этими тремя сочинениями не поймут содержания моего сочинения. Мне стоило многих трудов ограничиться исключительно только ссылками на эти три сочинения“.

Таким образом у арабов, под влиянием греческой математики, алгебра и в XI столетии оказалась в зависимости от геометрии.

Возникает любопытный вопрос: каким образом и когда сбросила с себя эту зависимость алгебра?

Западная Европа унаследовала культуру греков, арабов и римлян. Как и когда произошло окончательное отделение алгебры от геометрии?

6. Римляне, как математики.

Из всех учеников древних греческих математиков римляне оказались менее всего способными.

Римлянам алгебра Диофанта не была известна, что вполне понятно.

Слишком практичны были римляне, чтобы изучать алгебру. Арифметика у них привилась, и получившее большое распространение сочинение Боэция „De Institutione Arithmetica“ (524 г.

---

1) Это предложение Евклида выражает следующее алгебраическое тождество:

$$(a + 2b) \cdot a + b^2 = (a + b)^2$$

В самом деле: если $CB = a$, $BD = b$, тогда $AC = a + 2b$ и $DC = (a + b)$. (См. очерк: „*Древнейший учебник геометрии*“).

по Р. Х.) представляет из себя перевод греческой арифметики Никомаха (100 г. по Р. Х.).

Наши учителя в области права—римляне—задачам придают своеобразный характер.

Вот одна из таких задач:

„Некто, умирая, оставил жену в ожидании ребенка и завещал, в случае рождения сына, отдать ему $^2/_3$ своего имения, матери $^1/_3$; в случае же рождения дочери она должна получить $^1/_3$, а мать ее $^2/_3$ имения мужа. Вдова завещателя родила близнецов,—мальчика и девочку. Как нужно разделить имение, чтобы исполнить волю завещателя?“ [1]).

Вообще говоря, математика у римлян была в пренебрежении, и из всех народов, получивших наследство греков, они менее остальных воспользовались этим наследством. Любопытно, что Боэций, переведший 3 книги Евклида, все доказательства выкинул.

Труды обоснования геометрии оказались, с точки зрения Боэция, не имеющими цены. Геометрия опустилась до простого перечня истин, необходимых для практических надобностей государства.

Подобно Никомаху, всю математику Боэций делит на 4 отдела: арифметику, музыку, геометрию и астрономию. Это „quadrivium“ вместе с „trivium“ (грамматика, реторика и логика) составляли квинт-эссенцию всей образованности средних веков.

Алгебра была исключена, как ненужная наука.

7. „Liber abaci“ Леонарда Фибоначчи.

Первый, кто познакомил европейских ученых с алгеброй был Леонард из Пизы (1175—?) [2]).

О жизни его мы знаем очень мало. Известно только, что он путешествовал по Египту, Сирии и Греции и по возвращении написал книгу: „*Liber abaci*“ [3]) (1-ое изд. 1202 г., 2-ое изд. 1228 г.), „присоединив к индийскому методу кое-что от себя, кое-что от тонкостей геометрического искусства Евклида, дабы род латинян не оставался более несведущим во всех этих вещах“.

---

[1]) Знаменитый римский юрист Сальвиан Юлиан решил, что имение должно быть разделено на 7 равных частей, из коих четыре должны перейти к сыну, две к жене и одна к дочери.

[2]) Он известен также под именем Леонардо Фибоначчи.

[3]) „Книга об абаке“.

„Liber abaci"

Леонарда Фибоначчи.

Гл. 1. О познании девяти индийских чисел. Счет при помощи пальцев. Абак (4).

Гл. 2. Об умножении целых чисел (11).

Гл. 3. О соединении целых чисел (4).

Гл. 4. О вычитании меньших чисел из больших (1).

Гл. 5. О делении целых чисел (24).

Гл. 6. Об умножении целых чисел на дроби (17).

Гл. 7. О сложении вычитании и делении чисел с дробями и разложение многократных долей на простые [1] (20).

Гл. 8. О нахождении стоимости товаров по большому способу [2] (35).

Гл. 9. Об обмене товаров и подобных вещей [3] (17).

Гл. 10. О разделе при товариществах (8).

Гл. 11. О сплавах монетных (23).

Гл. 12. О вопросах абака [4] (154).

Гл. 13. О правилах „эльхатайн" [5] (34).

Гл. 14. О нахождении кв. и куб. корней. Действия над радикалами (35).

Гл. 15. О правилах, относящихся к геометрии и о задачах „аль-джебр в-аль-мукабала" (72).

---

1) т. е. с числителем 1.

2) Простое тройное правило.

3) Наши цепное и сложное тройное правила.

4) Здесь мы находим вопросы из отдела прогрессий, „regula recta" и „regula versa", т. е. задачи, решаемые теперь при помощи уравнений.

5) Правило двойного ложного положения.

Оглавление книги «*Liber abaci*» 1228 г.

(Числа в скобках обозначают число страниц отдела).

„*Liber abaci*" в течение нескольких столетий служила для авторов арифметики и алгебраических сочинений той кладовой, из которой они брали материал для своих книг [1]).

Сочинение Леонарда начинается так: „Девять индусских знаков суть след.: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. С помощью этих знаков и знака 0, который называется по арабски „сифр", можно написать какое угодно число".

Все сочинение состоит из 15 книг. (См. Оглавление этой книги).

В последней из них говорится о „правилах, относящихся к геометри, и о задачах „aljebr w'almucabalah" [2]).

Алгебра Леонарда, подобно арабской, лишена каких-либ алгебраических символов. Уравнения и формулы выражаются словами.

Квадрат неизвестного называется census (имущество), само неизвестное—radix (корень), известный член у—ния—numerus (число).

Интересно, что Леонардо об'ясняет решение кв. у—ни на том же самом примере, которым пользуется Аль-Хваризми

$$x^2+10x=39$$

и решает его геометрически. Леонардо указывает, что у—ние вида $x^2+q=px$ имеет два решения.

„Liber abaci" в течение двух столетий была единственной книгой, по которой можно было изучать математику. Она подготовила успехи итальянской алгебры в эпоху Возрождения. Однако, несмотря на несомненную талантливость автора, содержание книги Леонардо ничего не вносит нового, неизвестного арабским математикам.

8. Первое печатное сочинение по алгебре.

XIV и XV столетия составляют переходную эпоху в европейской истории.

Великие изобретения и открытия этого времени глубоко изменили взгляды человека на природу, на людские отношения, на религию, они открыли новые пути для деятельности человека и способствовали торжеству разума и просвещения.

Во второй половине XV века три факта открывают нам эпоху Возрождения наук и искусств.

---

1) Кэджори, История элементарн. матем. стр. 126.

2) „Liber abaci" подробно разобрана в книге: Лоренц „Элементы высшей математики", стр. 221—228.

Sũma de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita.

Continentia de tutta lopera.

De numeri e misure in tutti modi occurrenti.
Proportioni e pportiõalita anotitia del. 5° de Euclide e de tutti li altri soi libri.
Chiaui ouero euidentie numero. 13. p le q̃tita continue pportiõali del. 6° e. 7° de Euclide extratte.
Tutte le pti delalgorismo: cioe releuare. ptir. multiplicar. sũmare. e sotrare cõ tutte sue pue i sani e rotti. e radici e progressioni.
De la regola mercantesca ditta del. 3. e soi fõdamenti con casi exemplari per c° m° §. G. guadagni: perdite: transportationi: e inuestite.
Partir. multiplicar. summar. e sotrar de le proportioni e de tutte sorti radici.
De le. 3. regole del catayn ditta positiõe e sua origie.
Euidentie generali ouer conclusioni n° 66. absoluere ogni caso che per regole ordinarie nõ si podesse.
Tutte sorte binomij e recisi e altre linee irratiõali del decimo de Euclide.
Tutte regole de algebra ditte de la cosa e lor fabriche e fondamenti.
Compagnie i tutti modi. e lor partire.
Socide de bestiami. e lor partire
Fitti: pesciõi: cottimi: liuelli: logagioni: e godimenti.
Baratti i tutti modi semplici: composti: e col tempo.
Cambi reali. secchi. fittitij. e di minuti ouer comuni.
Meriti semplici e a capo danno e altri termini.
Resti. saldi. sconti. de tempo e denari e la recare a un di piu partite.
Ori. argẽti. e loro affinare. e carattare.
Molti casi e ragioni straordinarie varie e diuerse a tutte occurentie commo nella sequente tauola appare ordinatamente de tutte.
Ordine a saper tener ogni cõto e scripture e del quaderno in vinegia.
Tariffa de tutte vsanze e costumi mercanteschi in tutto el mondo.
Pratica e theorica de geometria e de li. 5. corpi regulari e altri dependenti.
E molte altre cose d grandissimi piaceri e frutto cõmo diffusamente per la sequente tauola appare.

Титульный лист первой печатной книги по Алгебре. 1494.

В 1453 г. Константинополь был взят турками, и в том же году вышла первая печатная книга; в 1492 г. была открыта Америка.

Из этих фактов на первом месте следует поставить книгопечатание.

До середины XV века книги были рукописные. Перепиской их в большинстве случаев занимались монахи, наиболее грамотные и просвещенные в то время; однако, были и фабрики рукописных книг, где работали сотни переписчиков.

Книги были чрезвычайно дороги и доступны только богатым.

Так как одно и то же сочинение надо было переписывать во многих экземплярах, то у переписчиков появлялась иногда мысль несколько облегчить свою работу. Существовал, например, обычай первую букву страницы и даже самую страницу разрисовывать красками. Так как такая разрисовка отнимала много времени, то рисунки и даже надписи стали вырезывать на тонком листе железа. Этот лист накладывался на бумагу, покрывался краской—и на бумаге получалась буква или рисунок. Впоследствии начали даже вырезывать целые страницы. Получалось нечто похожее на современное стереотипное издание, которое применяется, например, в математике при печатании таблиц логарифмов и т. п.

От такого способа печатания до мысли о подвижных буквах был только шаг.

Эту мысль осуществил, как известно, Іоганн Гутенберг, который первый начал „набирать" страницы. В 1452 году было начато печатание Библии и окончено через три года [1]).

Первая печатная книга по алгебре появилась в 1494-м г.

Книга эта содержит все сведения по алгебре, арифметике и тригонометрии конца XV столетия.

О жизни ее автора, Луки Пачиоли (Lukas Pacioli [2]) 1445—1514 г.), мы знаем очень мало. Известно только, что он был монах-францисканец, преподавал математику в Риме, Пизе, Венеции и Милане. Умер во Флоренции. Его другом был бессмертный Леонардо да Винчи.

Полное заглавие книги: „*Summa de arithmetica, geometria, proporzioni e proportionalita*".

Все сочинение делится на две части: в первой содержится арифметика и алгебра, во второй—геометрия.

---

[1]) У нас в России в 1564-ом году при царе Іоанне Грозном была отпечатана первая книга в Москве дьяконом Николо-Гостунской церкви Иваном Федоровым.

[2]) Более полное его имя: Frater Lucas de Burgo Sancti Sepulcri.

В алгебраической части изложены способы решения у—ний 1-й и 2-ой степени. Следуя своему предшественнику Леонардо Фибоначчи и арабам, Пачиоли называет неизвестное „cosa", или полатыни „res", а квадрат „census" и т. д., обозначая сокращенно через *co*, *ce* и *cu* [1]) наши x, x^2 и x^3. Вместо „plus" и „minus" он пишет p или $\bar{p}$, m и $\bar{m}$.

Выражение 3 co . p . 4 ce . m . 5 cu . p . 2 cece m 6 надо было понимать

$$3x^1+4x^2-5x^3+2x^4-6.$$

Для трех квадратных у—ний вида:

$$x^2+px=q$$

$$px+q=x^2$$

$$x^2+q=px$$

даются решения в стихотворной форме:

Primi canonis versus.

Si res et census numero coequantur, a rebus
Dimidio sumpto censum producere debes
Addereque numero, cuius a radice totiens
Tolle semis rerum, census latusque redibit.

Secundi canonis versus.

Et si eum rebus dragme quadrato pares sint
Adde sicut primo numerum producto quadrato
Ex rebus mediis, eiusque radice recepta
Si rebus mediis addes, census patefiet.

Tertii canonis versus.

At si eum numero census radices equabit
Dragmas a quadrato deme rerum medietarum
Cuiusque supererit radicem adde trahere
A rebus mediis, sic census costa notescet [2]).

---

[1]) *co*—cosa; *ce*—census; *cu*—cuba.

[2]) Эти три стихотворения описывают формулы, которые получаются при решении квадратных уравнений. Например, второе стихотворение при переводе на алгебраический язык дает формулу:

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$$

Подобное же стихотворение можно было бы придумать и для нашей обыч-

В общем трактат Пачиоли содержит в себе все сведения по арифметике, алгебре и тригонометрии XV столетия.

Книга Пачиоли имела большое распространение, так как была печатана в большом числе; однако в ней находится мало новых сведений в сравнении с книгой Леонардо из Пизы.

9. „Ars Magna" Кардана и „Algebra" Бомбелли.

Следующими после трактата Пачиоли сочинениями, на которые необходимо указать, излагая историю алгебры, являются „Ars Magna" Кардана и „Algebra" Бомбелли. Обе содержат в себе совокупность знаний по алгебре первой и второй половины XVI столетия.

Автор многочисленных сочинений по математике, в том числе алгебраического сочинения „*Ars Magna*" [1],—Geronimo Cardano родился в Павии 24 сентября 1501 г. Cardano был физиком и профессором в Милане (1534—1549) и профессором медицины в Павии (1562—1570) и в Болонье. Он оказал огромное влияние своими сочинениями на развитие математического образования в Италии.

Жизнь Cardano довольно бурная. Отчаянный игрок и в то же время страстный поклонник науки, философ и астролог, он осуждается в ереси за опубликование гороскопа [2]) Христа. В гневе за осуждение

ной формулы:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Дано уравненье:

$$x^2 + px + q = 0$$

Вот в стихах решенье:

„Взяв со знаком p обратным
На два мы его разделим.
Дальше „минус", „плюс" поставим
Перед корнем мы квадратным,
А под корнем очень кстати
Половину „p" в квадрате
Минус „q". И вот решенье
Да́нного нам уравненья".

[1]) Название „*Ars Magna*", по-италиански „*Arte maggiore*", употребляли италианские математики для отличия Алгебры от Арифметики, которую называли „*Ars Minor*". Полное заглавие книги Кардана следующее: „*Artis magne sive de regulis Algebrae Liber unus*".

[2]) Гороскоп составлялся в средние века по определенным правилам. Эти правила были основаны на астрономии Птоломея и ведут свое начало из *Tetrabiblos* („Четырекнижие"), книги, которая, говорят, написана самим Птоломеем.

HIERONIMI
C.CARDANI MEDICI MEDIOLA
NENSIS, PRACTICA ARITH-
metice, & Menſurandi ſingularis. In qua
que preter alias cõtinentur, verſa
pagina demonſtrabit.



Титульный лист „*Практической арифметики*" Кардана с портретом автора. 1539.

к смертной казни сына, отравившего жену, Cardano отрубает уши своему младшему сыну и в то же время за искусство астрологии пользуется покровительством папы Григория XIII, который не раз спасает его во всех затруднительных обстоятельствах его бурной жизни. Предсказавши свою собственную смерть, Cardano убивает себя 21 сентября 1576 г., чтобы поддержать свою славу астролога.

Таковы биографические данныя автора алгебраического трактата „*Ars Magna*“.

Как и в алгебре его соотечественника Бомбелли, мы видим уже в „*Ars Magna*“ кое-что новое, чего нет у Леонардо Фибоначчи и Луки Пачиоли.

С внешней стороны здесь мы находим попытки упростить словесную алгебру, введя сокращения.

У Кардана выражение

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

записано:

$$R_x\ u\ .\ cu\ .\ R_x\ 108\ \bar{p}\ 10\ |\ \bar{m}\ R_x\ u\ .\ cu\ .\ R_x\ 108\ \bar{m}\ 10$$ [1]).

а у Бомбелли

$$R\ .\ c\,\lfloor\ R\ .\ q\ 4352\ p\ .\ 16\ \rfloor\ m\ R\ .\ c\ .\ \lfloor\ R\ .\ q\ .\ 4352\ .\ m\ .\ 16\ \rfloor$$

значит

$$\sqrt[3]{(\sqrt{4352}+16)}-\sqrt[3]{(\sqrt{4352}-16)}\,.$$

Кардан вводит впервые в у—ние отрицательные и мнимые корни, называя их „*фиктивными*“ („numeri ficti“ sive „falsi“) в отличие от действительных чисел (numeri veri), к которым он относит целые, дробные и иррациональные числа.

Хотя Кардан, повидимому, не особенно склонен принять мнимые корни, как решения у—ния, все же он показывает, что выражение $5+\sqrt{-15}$, будучи подставлено в у—ние:

$$x\ (10-x)=40$$

удовлетворяет ему. Действительно

$$(5+\sqrt{-15})\ (5-\sqrt{-15})=25+15$$

Таким образом Кардан как-бы решает задачу: „Разделить 10 на две части, произведение которых 40“.

---

1) R_x *u . cu* означает: „Radix universalis cubica“.

У Кардана имеются намеки на зависимость между коэффициентами уравнения и его корнями. Но самое ценное, что содержит в себе *Ars magna*, это—решение у—ния 3-й степени, украденное у Тартальи, и способ решать у—ние 4-й степени, открытое учеником Кардана—Феррари [1]).

Алгебра Бомбелли (1572 г.) состоит из трех книг.

Первая содержит элементы счета, главу о радикалах и теорию мнимых чисел.

Вторая—все, что относится к решению уравнения.

Третья—собрание задач, среди которых много довольно трудных.

Алгебра Бомбелли—это уже систематический курс, с доказательствами; налицо—довольно развитой символизм. В теории мнимых величин Бомбелли идет дальше Кардана, устанавливая значение i^m т. е. $(\sqrt{-1})^m$; извлекает корень квадратный и кубичный из мнимых чисел [2]). И это тогда, когда еще не были введены буквы в алгебру.

В предисловии к своей алгебре Бомбелли дает ее историю упоминая Диофанта, Мухаммеда-ибн-Мусу, индусов, как настоящих изобретателей алгебры. Далее называет Леонарда из Пизы, Пачиоли. Тарталью осуждает за то, что он обманул Феррари и Кардана.

При изложении истории открытий решений уравнений 3-ей и 4-ой степени в одном из очерков нам придется еще вернуться к Бомбелли.

К сожалению, о жизни Бомбелли нам известно только, что он родился в Болонье.

Подводя итог всему сказанному, мы приходим к заключению, что в сочинениях Кардана и Бомбелли содержание современной алгебры почти уже завершилось.

Однако арабские традиции еще сохранены, и прием „aljebr“ применяется, чтобы все члены были положительны. Но, вместо 6 форм Аль-Хваризми, Кардан, например, помещает 66 форм (для у—ний 2-й ст., 3-й ст. и 4-й ст.), причем каждая форма требует особого приема решения. Легко представить, сколько надо было затратить труда для запоминания всех этих 66 правил.

---

[1]) Истории открытия способов решения у—ний выше второй степени будет посвящен отдельный очерк.

[2]) См. Кэджири. Приложение.

Δίοφαντος. Προβλημάτων ἀριθμητικῶν βιβ. ιγ. (ок. 400 г.).

Brahmagupta. Cuttacad' hyaya. (ок. 620 г.).

Alcarismi. Al-jebr w'almukabalach. 820.

Alkhyyami. Al-jebr, 1080.

Bhascara. Bija Ganita. 1145.

Leonardo, F. Liber abaci. 1202.

Pacioli. Summa de arithmetica. 1494. Beuss.

Rudolff. Die Goss. 1525. Strassburg.

Stiefel. Arithm tica Integra. 1544. Nürenberg.

Cardano. Ars Magna. 1545.

RECORDE. The Whetstone of Witte. 1567. London.

Bombelli. Algebra. 1572. Bologne.

Vieta. In artem Analiticam Isagoge. 1591. Tours.

Girard. Invention nouvelle en l'algèbre. 1629. Amsterdam.

HARRIOT. Artis Analiticae praxis. 1631. London.

Descartes. La géométrie. 1637.

WALLIS. Algébra. 1685. Oxford.

M. Rolle. Traité d'Algèbre. 1690. Paris.

NEWTON. Arithmetica Universalis. 1707.

MACLAURIN. A Treatise of Algebra. 1748. London.

ЭЙЛЕР. Арифметика Универсальная. 1768. Санкт-Петербург.

Выписка главнейших сочинений по алгебре за 1500 лет. Как мы видим, заглавие трактатов по алгебре было очень изменчиво.

И в алгебре Кардана и в алгебре Бомбелли все задачи исключительно числовые.

Квадратное у—ние Кардан решает геометрически, как в алгебре Аль-Хваризми. Для кубического у—ния дается также геометрическое решение.

Таким образом алгебра продолжает и в XVI столетии находиться в зависимости от геометрии.

10. „Arithmetica Integra“ Михаила Штифеля.

Михаил Штифель (Michael Stifel. 1486?—1567)—величайший немецкий алгебраист XVI столетия. Опубликованный им в 1544 г. трактат по алгебре на латинском языке „*Arithmetica Integra*“ заключает в себе три книги.

Первая книга посвящена арифметике рациональных чисел и содержит в себе не только теорию, но также целый ряд примеров и задач.

Вторая книга—теория иррациональных чисел.

Третья—посвящена собственно алгебре, изобретение которой приписывается „Gebro Astronomo“ (Астроному Гебру) — довольно распространенное мнение среди математиков того времени [1]).

Книга Штифеля имела для Германии такое же значение, какое „*Ars Magna*“ Кардана для Италии. Это была, так сказать, кладовая, из которой долгое время черпали материал последующие немецкие составители учебников по арифметике и алгебре.

С внешней стороны в алгебре Штифеля налицо довольно развитой символизм, хотя из его знаков удержались только $+$ и $-$. Неизвестное он обозначает первой буквой (r) слова radix (корень) или res (вещь); степени неизвестного: x^2, x^3, x^4 и т. п. через буквы *z*, *cz*, *zz*.

С внутренней стороны необходимо отметить следующие особенности алгебры Штифеля:

1. На число Штифель смотрит несколько шире, чем его предшественники, пользуясь числами отрицательными — „меньшими, чем ничто“ (numeri minores nihilo ut sunt 0—3; 0—8 etc.), хотя называет их „абсурдными“, при которых все идет абсурдно и навыворот (absurdo sive inverse).

---

[1]) По их представлению слово algebra—искаженное „Gebr“.

„Нуль“ согласно представлению Штифеля стоит между числами истинными и абсурдными (O id est nihil, quod mediat inter numeros veros et numeros absurdos).

По отношению к иррациональным числам Штифель занимает своеобразную позицию.

При доказательствах действий над несоизмеримыми числами (2-ая книга) он прибегает, как и Евклид к отрезкам, однако несколько колеблется. Штифель задает себе вопрос, правда ли, что иррациональные числа суть действительные числа (veri) [1], он говорит за и против.

Вот что является против:

„Non autem potest dici numerus verus, qui talis est ut praecisione careat, et ad numeros veros nullam cognitam habeat proportionem. Sicut igitur infinitus numerus, non est numerus: sic irrationalis numerus non est verus numerus, quum lateat sub quadam infinitatis nebula“.

Иррациональное число не может быть названо действительным числом, если оно таково, что лишено определенности и к действительному числу не имеет никакого отношения. Подобно тому как бесконечное число не есть число: так иррациональное число не есть действительное число; какое-то облако неопределенности скрывает его.

Свою заметку Штифель заканчивает указанием на то, что еще Евклид не признал иррациональные числа за действительные числа.

2. В область уравнений Штифель ничего нового не вносит. Для него существуют только положительные корни и поэтому только у—ние вида:

$$ax^2 = bx - c$$

имеет у Штифеля два корня т. к. они оба положительны:

$$x = \frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Случай, когда $4ac > b^2$ им не рассматривается.

3. Книга Штифеля замечательна, благодаря одной идее, которая близко соприкасается с идеей логарифма [2]).

Оказывается, если написать две прогрессии:

арифм. прогрессию: $-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

и геометр. прогрессию: $\frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64$

[1]) Здесь слово veri можно передать также „настоящие числа“.

[2]) Истории логарифмов будет посвящен особый очерк.

ARITHMETI
CA INTEGRA.

Authore Michaele Stifelio.



Norimbergæ apud Iohan. Petreium.
Anno Christi M. D. XLIIII

Cum gratia & priuilegio Cæsareo
atq; Regio ad Sexennium.

Титульный лист „Arithmetica integra“ *Штифеля*.

то можно умножение, деление, возвышение в степень и извлечение корня из чисел нижнего ряда заменить более простыми действиями сложения, вычитания, умножения и деления над соответственными числами верхнего ряда. Так, если нужно $\frac{1}{4} \cdot 32$, то можно вместо умножения сложить соответствующие числа арифметической прогрессии: $(-2) + 5 = 3$, и под тремя найти ответ, т. е. 8. Чтобы найти $\sqrt[3]{64}$, отыскиваем соответствующее 64 число 6, делим его на показатель корня 3; получаем 2. Под 2-мя имеется искомый корень, т. е. 4. В очерке по истории логарифмов мы увидим, что только через полвека идея Штифеля получила практическое осуществление.

В заключение нашего разбора алгебры Штифеля необходимо отметить, что все примеры и теоремы доказываются и разбираются им на числах. Буквой обозначается только неизвестное при решении уравнений. В этом отношении алгебра Штифеля мало отличается от алгебры Диофанта.

11. Первая буквенная алгебра.

В 1591-м году появилось сочинение под заглавием „*In Artem Analitikam Isagoge*“. Сам автор и современники, по всей вероятности, не подозревали о том перевороте, который делает этот трактат в истории алгебры, т. к. они не сохранили нам его подлинника.

Сочинение это замечательно тем, что в нем впервые для обозначения чисел употребляются буквы.

Так, например, мы находим в этой алгебре следующее выражение:

$$\frac{B\ in\ A}{D} + \left\{\frac{\begin{matrix} B\ in\ A \\ -B\ in\ H\end{matrix}}{F}\right\}\ aequabuntur\ B,$$

что соответствует обычной нашей записи [1]):

$$\frac{ax}{b} + \frac{ax - ac}{d} = a.$$

Мы считаем необходимым сделать здесь небольшое отступление.

По отношению к обозначениям, принятым теперь в математике, историки делят различные алгебры на три класса.

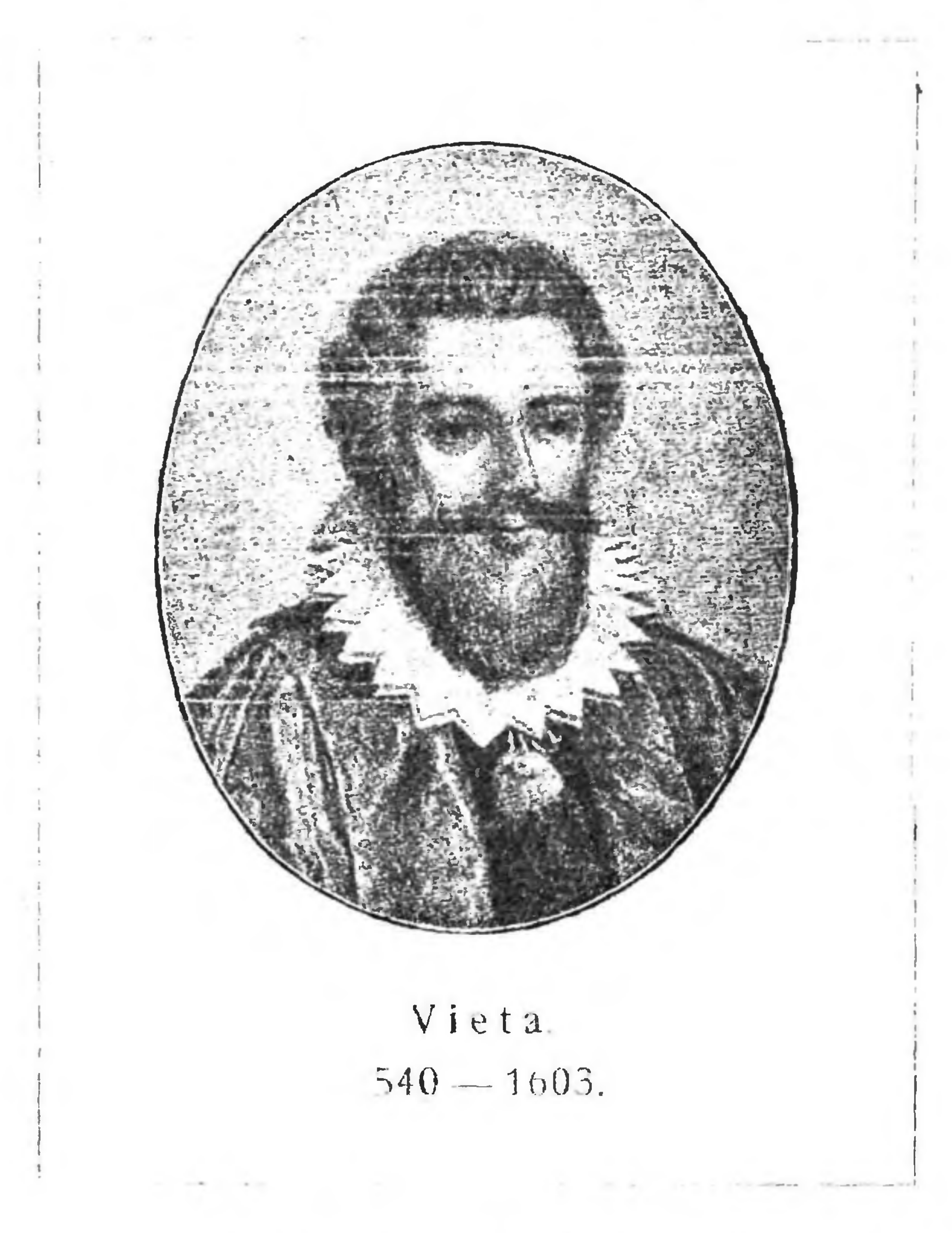
---

[1]) Неизвестное обозначено здесь буквой A, а известные согласными B, D, H, F.

1. Реторические алгебры. Нет никаких символов, а все предложения пишутся полностью словами. К этому типу принадлежит, например, алгебра Махомеда-Бен-Музы Альхваризми и большинства арабских алгебраистов; также алгебра Региомонтана и итальянских писателей XV столетия.

У—ние $x^2 + 10x = 39$ Альхаризми записывает: „Квадрат и десять корней его равны тридцати девяти диргем".

2. Синкопированные алгебры. Как и в первом классе, все написано словами, но для обозначения часто встречающихся понятий употребляются сокращения. Такова, например алгебра Диофанта.



Vieta.
540 — 1603.

К ним принадлежат все алгебры европейских писателей до середины XVII стол.

В алгебре Бомбелли выражение:

$$2x^2 - 2x + 22$$

записано так:

$$2 \overset{2}{\smile} m\, 2 \overset{1}{\smile} p\, 22.$$

3. Символические алгебры. Все действия и выражения представляются с помощью вполне развитого символизма. К этому типу можно

отнести индусские сочинения, а также европейские алгебры от середины XVII века.

Наша современная символистика окончательно создалась только к началу XVIII столетия.

Мы увидим, что „*Arithmetica Universalis*“ Ньютона по своим обозначениям уже не отличается от современной алгебры.

Автор первой буквенной алгебры, заглавие которой мы дали выше: „*In Artem Analiticam Isagoge*“, был французский математик Viéte, или, по-латыни, Vieta (1540—1603).

К сожалению, о жизни основателя современной буквенной алгебры мы знаем очень мало.

Свою карьеру Виет начал адвокатом, но свободное время посвящал занятиям математикой. Целые дни и ночи просиживал он за рабочим столом. Творил ли он или только наслаждался красотой и глубиной „царицы наук“,—кто знает... Но только изредка друзья Vieta получали в подарок трактат математического содержания.

Виет, издавая свои сочинения на собственные средства, не пускал их в продажу. Очевидно, он считал оскорбительным для себя и любимой им науки торговать плодами своего творчества.

Как мы уже сказали, сочинением „*In Artem Analiticam Isagoge*“ начинается новая глава в истории алгебры. В нем известные величины обозначены согласными B, C, D . . . .
неизвестные—гласными: A, E, I . . . . [1]).

Впервые упоминается о „коэффициенте“, „положительном“ и „отрицательном“ числе.

Уже есть намеки на связь между коэффициентами и корнями уравнения. Так, Vieta утверждает, что у—ние

$$x^3-(u+v+w)\,x^2+(uv+vw+wu)\,x-uvw=0$$

имеет корни u, v, w [2]).

Vieta создает аналитический метод для решения у—ний. Особой подстановкой он полные кв. у—ния 3-й и 4-й степени приводит к неполным. *Например*, у—ние $ax^2+bx+c=0$ подстановкой $x=z+h$ и выбором h можно сделать неполным.

---

[1]) В численных у—ниях Виет неизвестные x, x^2, x^3 . . . обозначал N, Q, C... — начальные буквы слов: numerus, quadratus, cubus. См. коллекцию алгебраических записей.

[2]) В этом легко убедиться подстановкой в у—ние u, v, w вместо x.

Запись у—ния у Виеты другая:

„*Si A* cubus $-B-D-G$ in A quadr. $+B$ in $D+B$ in $G+D$ in G in A aequetur B in D in G: A explicabilis est de qualibet illarum trium BD vel G“.

Действительно:

$$a\,(z+h)^2 + b\,(z+h) + c = 0$$

или

$$az^2 + (2ah+b)\,z + ah^2 + bh + c = 0.$$

Выберем h так, чтобы коэффициент при z был нуль, т.-е. чтобы $2ah + b = 0$ или $h = -\frac{b}{2a}$.

Подставив найденное значение h, имеем:

$$az^2 + \left(\frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c\right) = 0$$

или

$$az^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$z = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ x = h + z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Это есть обычная формула для решения квадратного уравнения.

Viète'у мы обязаны еще многими другими идеями по математике. Но все они ничтожны в сравнении с главным: введение букв для обозначения чисел, как неизвестных, так и известных.

Евклид вместо букв употреблял отрезки, и многие соотношения алгебраического свойства, например:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \text{ (Кн. II, предл. 4)}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)\,b \text{ (Кн. II, предл. 6)}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \text{ (Кн. II, предл. 9)}$$

он доказывает геометрически.

Отчасти введению букв в алгебру мешал греческим математикам их способ изображения чисел. Как известно, у древних греков, например, τν значило определенное число—350.

Интересно отметить, что Viète, введший буквы, под ними всегда подразумевает положительное число. Между тем в настоящее время мы знаем, что, если дано число $(-a)$, мы часто не можем сказать, какое оно—положительное ли, или отрицательное, дробное или несоизмеримое. Такое обобщение было сделано математиками только впоследствии. О том, какую существенную роль в математике в настоящее время играют буквы, вряд ли следует говорить.

Если Диофант пользовался особыми символами для обозначения неизвестного, то идея пользования буквами, как символами для обозначения „какого-нибудь числа“, принадлежит Viéte'y. В этом его великая заслуга.

12. Сочинение по алгебре Альберта Жирара.

Появившаяся в 1629 г. небольшая книга (всего 64 стр.) Жирара [1]) (Girard, 1595—1632) „*Invention nouvelle en l'algèbre*“ [2]) должна быть разобрана в нашем очерке, т. к. содержит в себе много интересного.

Первая часть этой книжки представляет введение в общую арифметику.

Вторая — посвящена алгебре.

Третья — касается особого, открытого автором, способа определения площадей сферических треугольников и четыреугольников.

В этом очерке нас будет интересовать лишь вторая часть этой интересной книжки.

Жирар прежде всего вносит много нового в **общую теорию уравнений**, благодаря употреблению отрицательных и мнимых чисел.

Так, ему известно:

1. Всякое алгебраическое у—ние имеет столько корней, какова его степень.

Например, для у—ния четвертой степени

$$x^4 - 4x + 3 = 0$$

Жирар дает четыре корня:

$$x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1 + \sqrt{-2};\ x_4 = -1 - \sqrt{-2}.$$

И это в такое время (1629 г.), когда мнимые числа еще не получили реального толкования.

2. Коэффициенты уравнения могут быть образованы комбинацией его корней [3]).

---

[1]) Жирар по происхождению голландец. Родился в Лорене. Умер 9 декабря 1632 г.

[2]) *„Новое изобретение по алгебре“.*

[3]) **Кардан знал это свойство только для у—ния 3-ьей степени.**

В самом деле, если взять у—ние

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0,$$

которого корни суть:

$$x_1 = +3;\ x_2 = +1;\ x_3 = -2$$

то $\begin{cases} \text{2-ой коэфф.: } (-2) = -[3 + 1 - 2] \\ \text{3-ий коэфф.: } (-5) = +[3 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2)] \\ \text{4-ый коэфф.: } (+6) = -[3 \cdot 1 \cdot (-2)] \end{cases}$

Поэтому угадав, путем подстановки делителей 12, один корень $(+4)$ [1]) у—ния

$$x^3 = 13x + 12,$$

Жирар легко находит остальные. „Сумма двух других корней,— говорит он,—должна равняться (-4) [2]), а произведение

$$\frac{-12}{-4} = +3$$

поэтому остается для нахождения двух других корней решить у—ние

$$x^2 = -4x - 3\text{“}$$ [3])

что дает

$$x_2 = -3;\ x_3 = -1.$$

В алгебре Жирара имеется еще одно интересное место. Впервые дается треугольник (называемый обыкновенно *„треугольником Паскаля“* [4])

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
и т. д.

---

[1]) Что $(+4)$ является корнем у—ния, достаточно его подставить.

[2]) Действительно, в данном у—нии член с x^2 отсутствует; между тем сумма корней кубичного у—ния равна коэффициенту при x^2 (см. предыдущий пример).

Только когда $x_2 + x_3 = -4$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

т. к. $x_1 = +4.$

[3]) Составить квадратное у—ние, зная сумму и произведение корней, легко Сумма корней = коэфф. при неизв. первой степени с обратным знаком, произведение корней = свободному члену.

Это тоже было известно Жирару.

[4]) Паскаль жил 1623—1662. Работа о треугольнике появилась в 1653 г.

представляющий из себя коэффициенты биномов $(a+b)$; $(a+b)^2$; $(a+b)^3$ и т. д. Этот треугольник давал возможность извлекать корни 2-ой, 3-ей, 4-ой и т. д. степеней [1]), находить корни уравнений, т. к. из комбинаций (сочетаний) корней образуются коэффициенты всякого уравнения.

При получении отрицательных корней Жирар их очень хорошо об'ясняет на отрезках, хотя, как и Михаил Штифель, определяет отрицательное число, как „меньше, чем ничто".

Довольно развитая своеобразная символистика Жирара не привилась. Из символов, употребляемых им, сохранились лишь скобки.

Вот несколько записей, встречающихся в его книге:

$$A \; egale \; B; \;\; A \; ff \; B; \;\; B \; § \; A; \;\; \left(\frac{3}{2}\right) 49$$

что должно означать:

$$A = B; \;\; A > B; \;\; A < B; \;\; 49^{\frac{3}{2}}.$$

Сочинение Жирара не получило большого распространения. Большинство современников не было знакомо с его исследованиями, и потому Жирар оказал слабое влияние на развитие алгебры.

13. Роль Декарта в истории алгебры.

Великий французский математик René Descartes (1596—1650), основатель новой философии и геометрии, должен быть отмечен также в истории алгебры, как один из главных ее творцов.

В 1637 г. на французском языке появилось сочинение Декарта „La Géometrie", произведшее переворот в геометрии и математике. Вся третья часть этой небольшой книжечки касается теории уравнений.

Мы не будем в этом очерке подробно рассказывать, почему именно в геометрическом трактате понадобилось Декарту говорить о природе уравнений.

У древних греков математика распалась на две замкнутые области, строго разделенные. И это делалось в силу той пропасти, которая существует, по мнению древних философов, между „числом", „линией" и вообще величиной, взятой из природы. „Число принад-

---

[1]) Когда мы извлекаем кв. корень, то применяем формулу $(a+b)^2$; для кубичного корня надо знать формулу

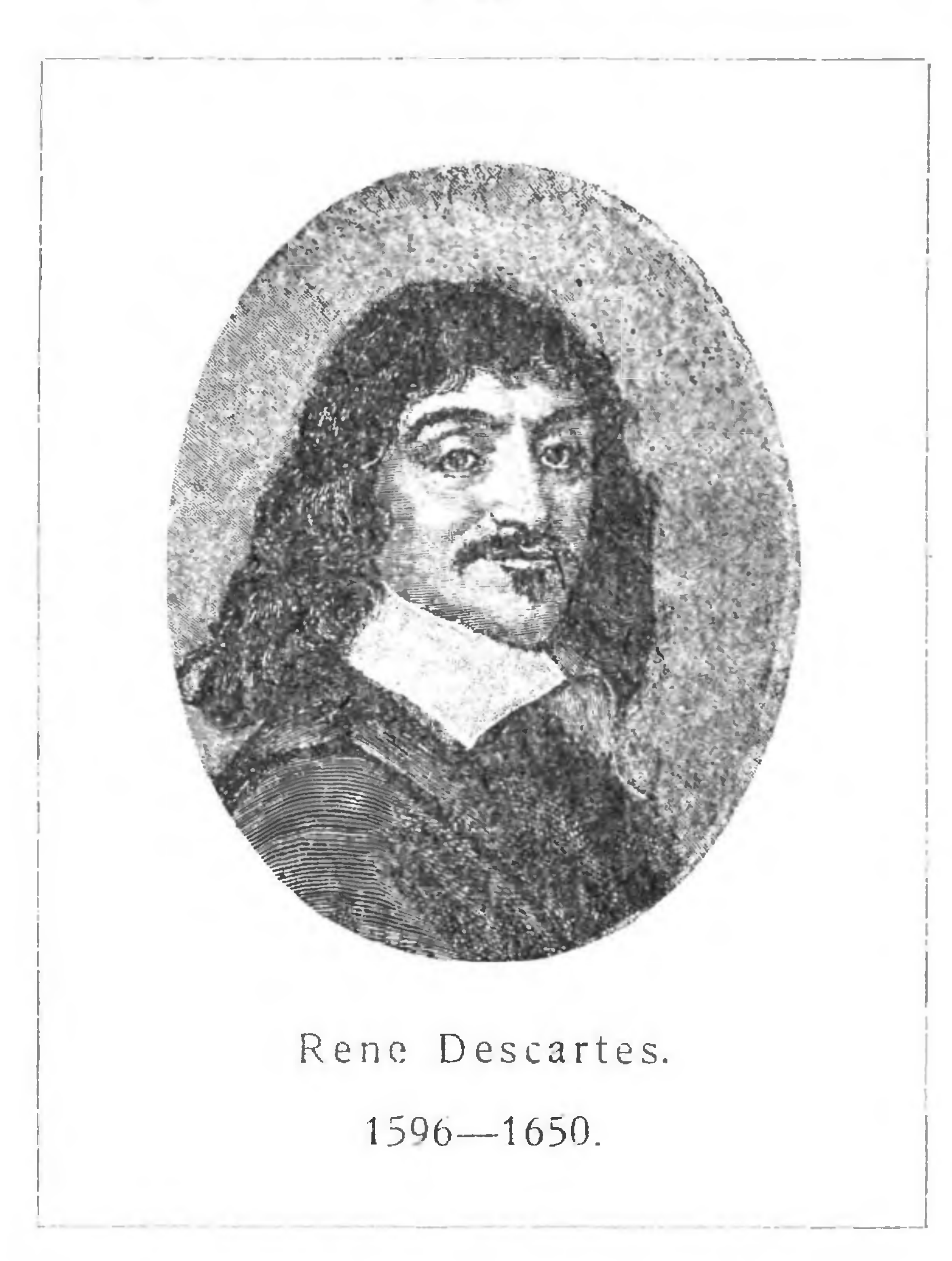
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

лежит к раздельным величинам“... „напротив, линия связно продолжается“... „Такого же свойства суть время и пространство“... [1])

„Никогда не следует доказывать,—говорит Аристотель в своей Логике,—переходя при этом из одного рода в другой; так, не следует прилагать арифметику к решению геометрических вопросов“.

Авторитет Аристотеля задержал развитие геометрии на долгое время.

Декарт совершенно игнорирует логические основания древних,



Rene Descartes.

1596—1650.

которые привели к строгому разделению арифметики и геометрии. Он уже понимает число, как нечто непрерывно изменяющееся [2]).

Это и дало возможность Декарту спаять две науки: науку о числе и науку о протяжении.

Какие идеи привели Декарта к этому?

Еще древние говорили: „Окружность—кривая, все точки которой одинаково удалены от одной точки, наз. центром“.

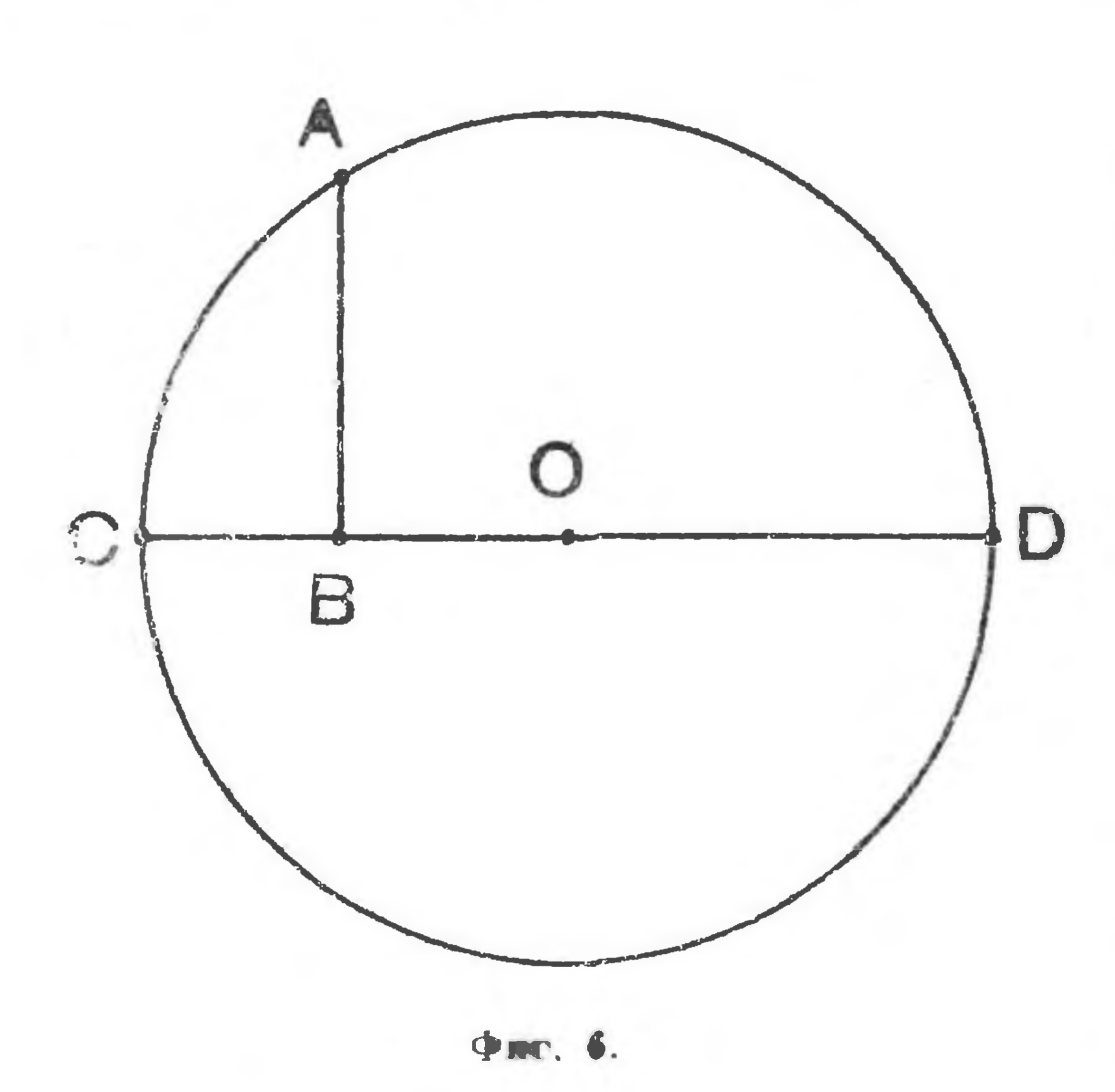
---

[1]) Аристотель. О категориях.

[2]) С точки зрения древних, от 1 до 2 нельзя перейти непрерывно. Между тем, отрезок можно увеличить вдвое непрерывным движением.

Это определение нам хорошо известно из элементарной геометрии и является основанием для изучения свойств окружности.

Однако, окружность можно изучать еще иначе. Уже Фалесу [1]) было известно, что вписанный угол, опирающийся на диаметр,— прямой, а Пифагор доказал, что перпендикуляр, опущенный из прямого угла на диаметр (гипотенузу), есть средняя пропорциональная между отрезками диаметра, т.-е. (фиг. 6)



Фиг. 6.

$$CB : AB = AB : BD$$

или, на основании свойства пропорции,—

$$AB^2 = CB \cdot BD.$$

Евклид понимает эту теорему так: площадь квадрата, построенного на перпендикуляре, равна площади прямоугольника, составленного из отрезков диаметра. Действительно:

AB^2—численно есть площадь квадрата, построенного на AB.

$CB \cdot BD$—площадь прямоугольника со сторонами CB и BD.

Если опустить перпендикуляр из другой точки, всегда кв. перпендикуляра равен произведению отрезков диаметра. Таким образом отсеченные отрезки диаметра находятся в связи и соответствии (координированы) с перпендикуляром. Будем называть перпендикуляр „ординатами", диаметр—„осью", а „абсциссами" [2]) полученные „отрезки" диаметра. Тогда окружность можно рассматривать, как кривую, в которой перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки окружности (ордината) на диаметр (ось), отсекает отрезки диаметра (абсциссы), при чем площадь прямоугольника, построенного на абсциссах, равна площади квадрата, сторона которого—ордината (перпендикуляр). Это соотношение будет справедливо для всех ординат.

[1]) Фалес—первый греческий ученый. Один из семи мудрецов. Жил в VII в до Р. Х.

[2]) „Абсцисса" значит—„отрезок".

„La Géometrie“

Декарта.

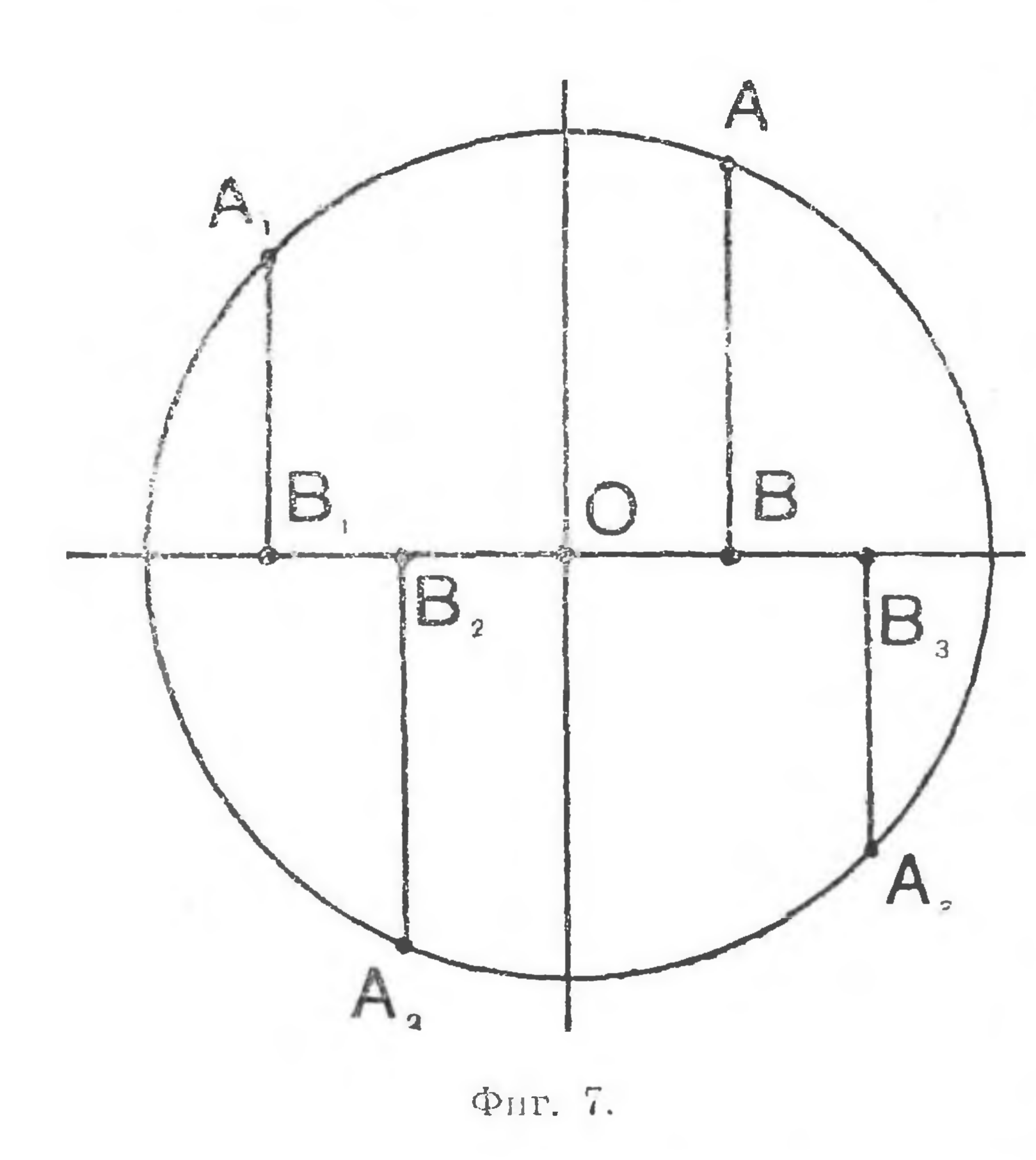
Содержание III-ьей книги.

Какими кривыми можно пользоваться при построении всякой задачи? Пример построения средних пропорциональных (2). О природе уравнений. Сколько может иметь корней всякое у-ние? Какие корни наз. ложными (fausses)? Как можно понизить степень у-ния, когда известен один из корней? Как можно узнать, что какое-либо число есть корень у-ния? (2) Сколько положительных и сколько отрицательных корней может иметь данное у-ние? Как можно сделать, чтобы все корни уравнения, которые были положительными, стали отрицательными и обратно? (1) Как можно увеличить или уменьшить на какое-либо число величину корней у-ния, не определяя их? (1) Увеличивая положительные корни, мы уменьшаем отрицательные (по абсолютной величине) (1). Как можно снять второй член у-ния? (1) Как можно сделать, что все отриц. корни становятся положительными, причем положительные не делаются отрицательными? (1) Как сделать, чтобы в неполном у-нии появились все члены? Как можно умножить или разделить корни, не определяя их? (1). Как сделать коэфф. у-ния целыми? (1) Как можно сделать член у-ния заведомо равный данному? Корни могут быть действительными и мнимыми (1). Понижение степени куб. у-ния, когда задача планиметрическая. Способ разделить у-ние на бином, который содержит корень у-ния (2). Какие задачи относятся к стереометрии, когда у-ние кубическое? Понижение степени у-ния 4-ой степени, когда задача планиметрическая (1). Пример такого понижения (2). Общее правило такого понижения. Общее правило построения задач, приводимых к у-ниям 3 и 4 ст. (4). Введение двух средних пропорциональных. Способ деления угла на три части (2). Все задачи построения кривых стереометрии можно свести к этим двум построениям (2). Способ найти значение всех корней куб. у-ния, а также тех, которые не превосходят 4-ой степени (2). Почему задачи кривых стереометрии не могут быть построены без конических сечений? (2) Общий способ построения всех задач, приведенных к у-нию не выше 6-ого измерения (7). Введение 4-х средних пропорциональных (2).

Содержание III-ьей книги Геометрии Декарта.
1637.

Будем обозначать числа, измеряющие ординаты — y, а абсциссы — x. Если диаметр круга есть a, то

$$BD = x;\ CB = a - x$$



Фиг. 7.

и

$$x\ (a - x) = y^2.$$

Если вести отсчет абсцисс от центра, введя R — радиус то наше у-ние примет вид:

$$(R + x)\ \ (R - x) = y^2;$$

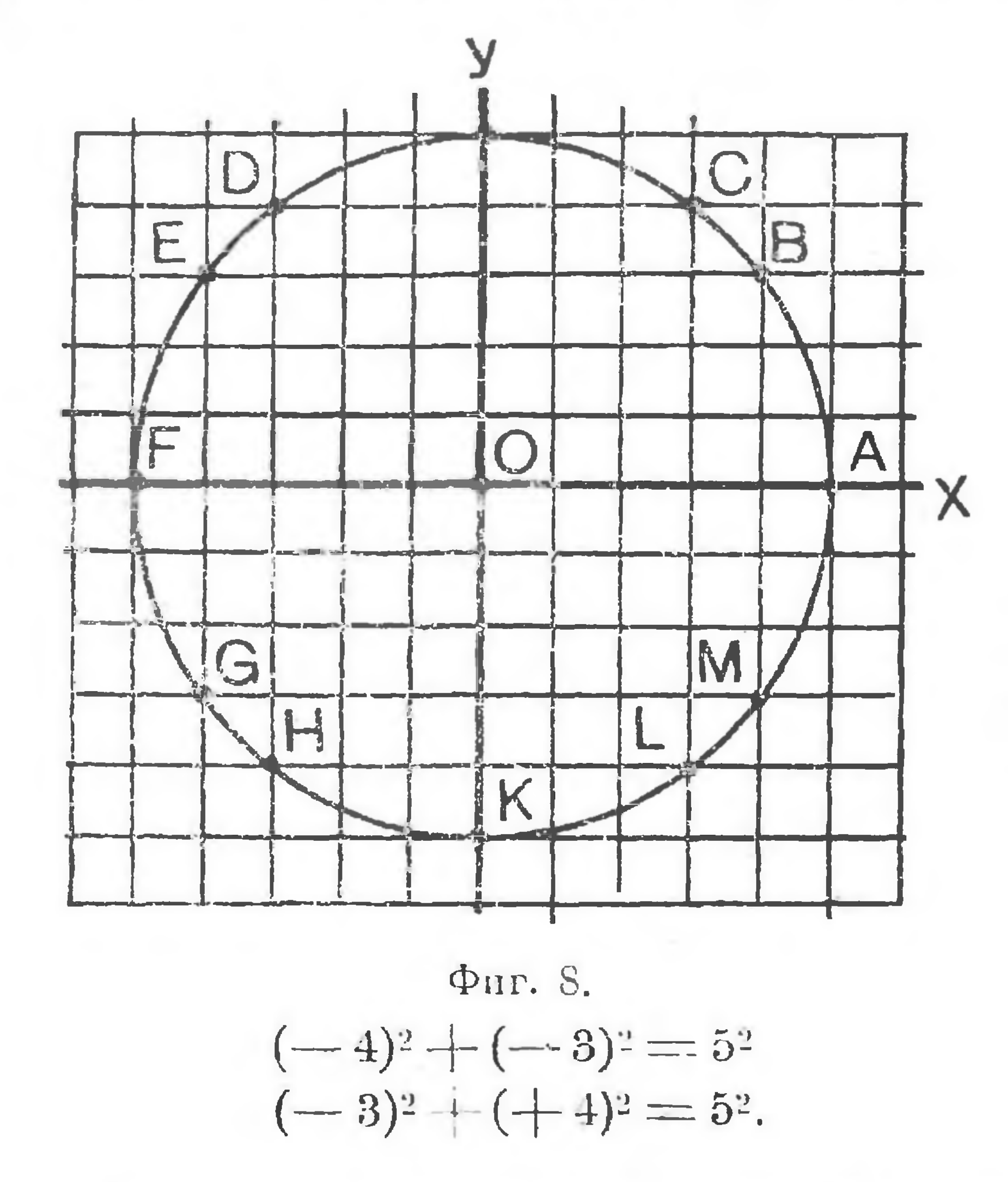
$$BD = R + x;\ \ CB = R - x$$

или

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Если условимся отрезки, отсчитываемые вверх от оси и вправо от точки O, считать положительными, а отрезки противоположного отсчета отрицательными, то последнее у-ние записывает все точки окружности.

Полож.	Отриц.
BA	B_2A_2
B_1A_1	B_3A_3
OB	OB_2
OB_3	OB_1



Фиг. 8.

$$(-4)^2 + (-3)^2 = 5^2$$
$$(-3)^2 + (+4)^2 = 5^2.$$

Однако, для любых точек A, A_1, A_2, A_3, A_4... сумма квадратов ординаты и абсциссы равна кв. радиуса:

$$OB^2 + BA^2 = R^2$$
$$OB_1^2 + B_1A_1^2 = R^2$$
$$OB_2^2 + B_2A_2^2 = R^2$$
$$OB_3^2 + B_3A_3^2 = R^2$$

Попытаемся пояснить идею Декарта на частных примерах.

Если возьмем окружность радиуса 5, то на такой окружности

между прочим имеются точки: A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, M, (фиг. 8).

x	y	
0	5	. . . . A
0	— 5	. . . . K
3	4	 C
3	— 4	 L
4	3	. . . . B
4	— 3	. . . . M
— 3	4	. . . . D
— 3	— 4	. . . . H
— 4	3	. . . . E
— 4	— 3	. . . . G
— 5	0	. . . . F
	и т. п.	

Фиг. 9.

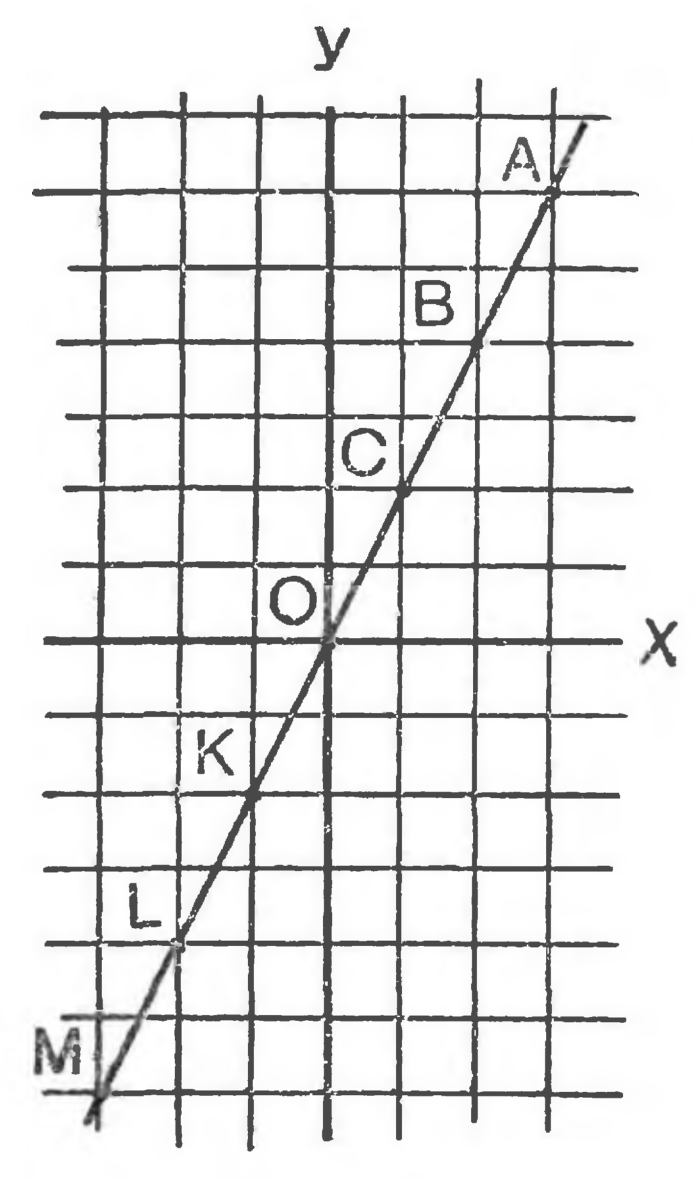
Как мы видим, метод Декарта позволяет „*перенумеровать*" все точки плоскости двумя числами, например, точка A (фиг. 9) (4,4) т.-е. $x = 4$, $y = 4$; B (1,3); C (— 3,3); D (— 2,2); E (— 3, — 1); F (— 2, — 3); G (+ 1, — 1); H (4, — 2).

Уравнением $x^2 + y^2 = 5^2$ мы записываем все *точки окружности*, т. к. при заданном действительном значении x (целом, дробном или иррациональном) и притом между + 5 и — 5

$$-5 \leqq x \leqq 5$$

y будет иметь определенное действительное значение [1]).

Уравнение $y = 2x$ записывает прямую, у которой все ординаты вдвое больше абсцисс. (фиг. 10).



Фиг. 10.

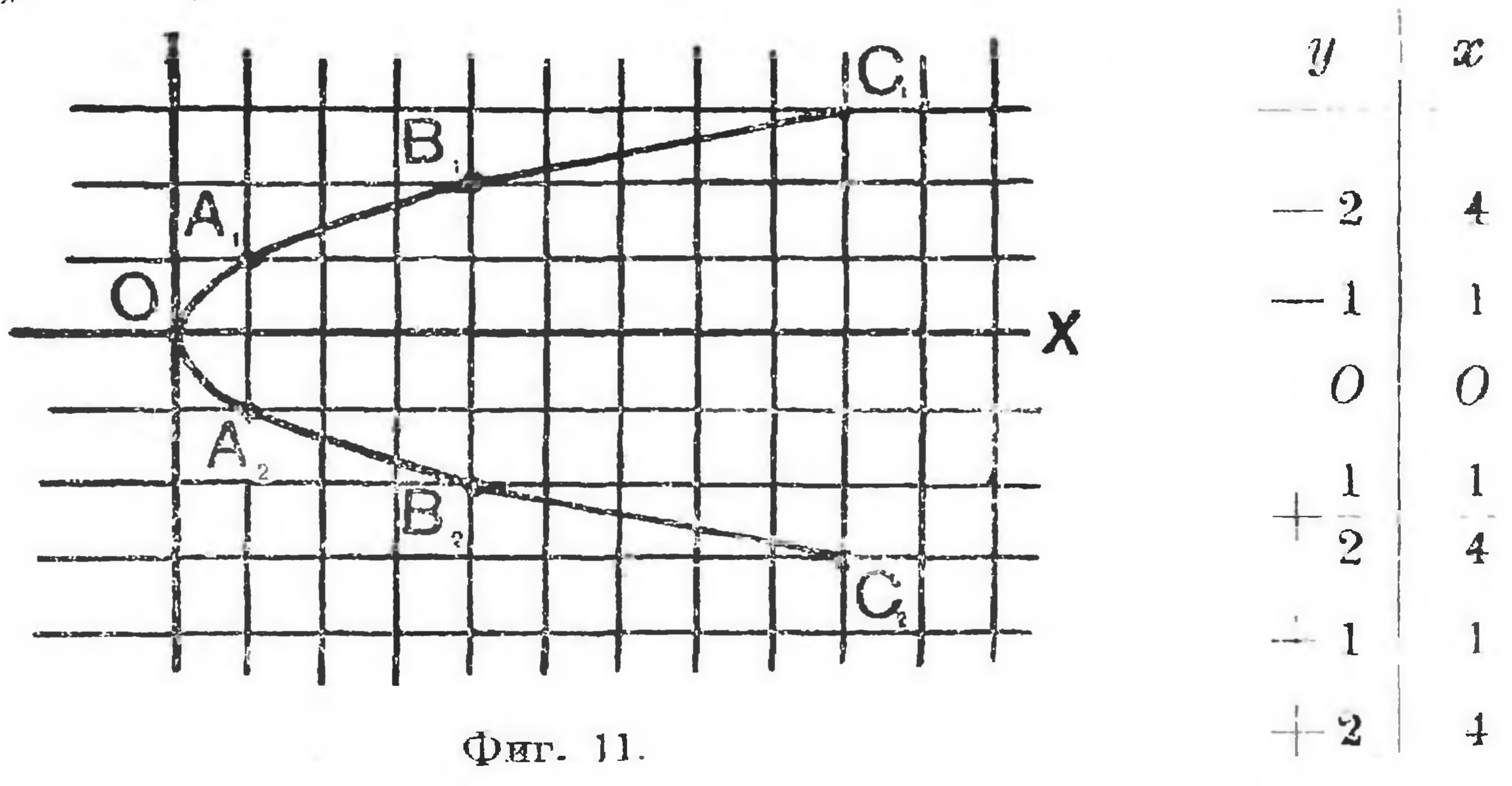
Если из любой точки прямой опускать перпендикуляры на ось абсцисс, то отношение ординат (y) к абсциссам (x) будет равно 2:

$$\frac{y}{x} = 2$$

[1]) Читателю рекомендуется сделать подстановку $x > 5$ в уравнение $x^2 + y^2 = 5^2$; y окажется мнимым.

Обратно: если откладывать перпендикуляры к оси абсцисс вдвое больше расстояния их от начала 0, то концы перпендикуляров будут лежать на прямой.

Уравнение $x = y^2$ представляет из себя уравнение параболы (фиг. 11).

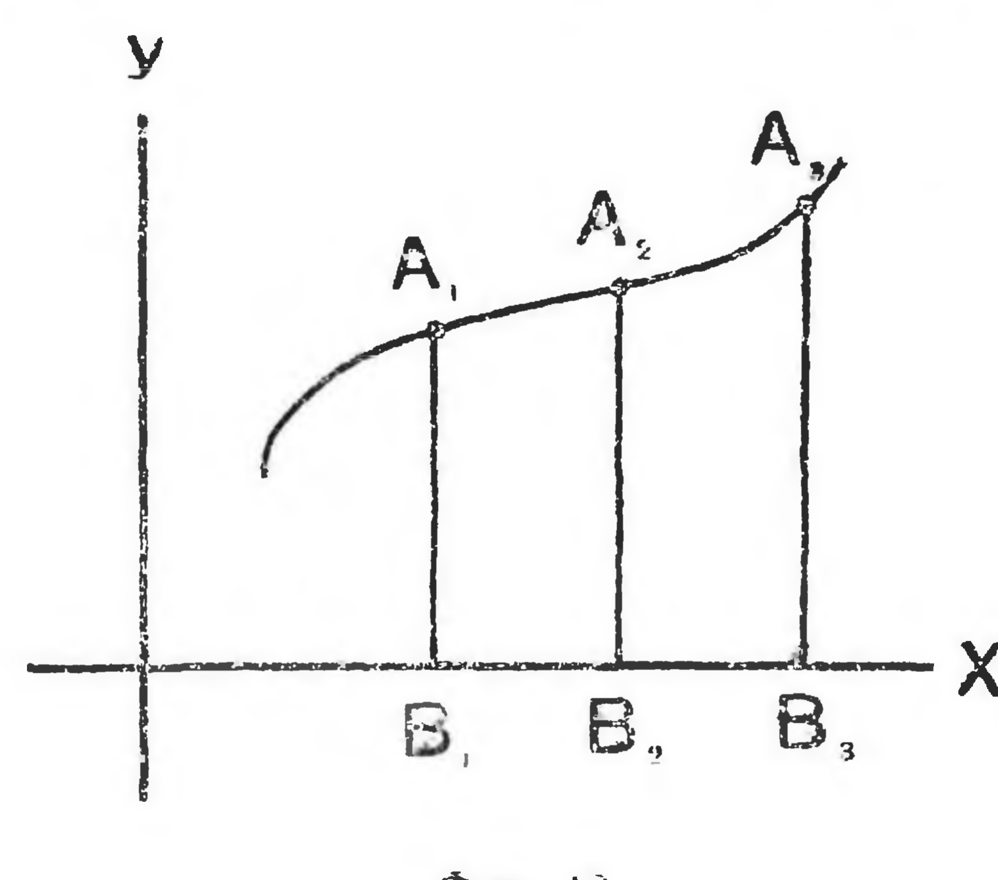


y	x
-2	4
-1	1
0	0
$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$+1$	1
$+2$	4

Фиг. 11.

Как мы уже сказали, „*La Géometrie*“ Декарта появилась в 1637 году.

Эта небольшая книжка, благодаря своим общим и вместе с тем простым методам изображения геометрической кривой (путем уравнений) имела огромное значение. С точки зрения Декарта всякую линию можно рассматривать, как геометрическое место конечных точек: A_1 A_2 A_3 . . . ряда перпендикуляров, восстановленных к любой прямой, названной им „осью абсцисс“ (фиг. 12).



Фиг. 12.

Встретив затруднение, что одна только длина перпендикуляра (y) до точки кривой не показывает, с какой стороны оси x находится точка кривой, Декарт вводит условие, что перпендикуляры, отложенные в противоположную сторону должны иметь противоположный знак (подобное же условие Декарт вводит и для оси x).

Получилась настоящая иллюстрация для отрицательных чисел [1].

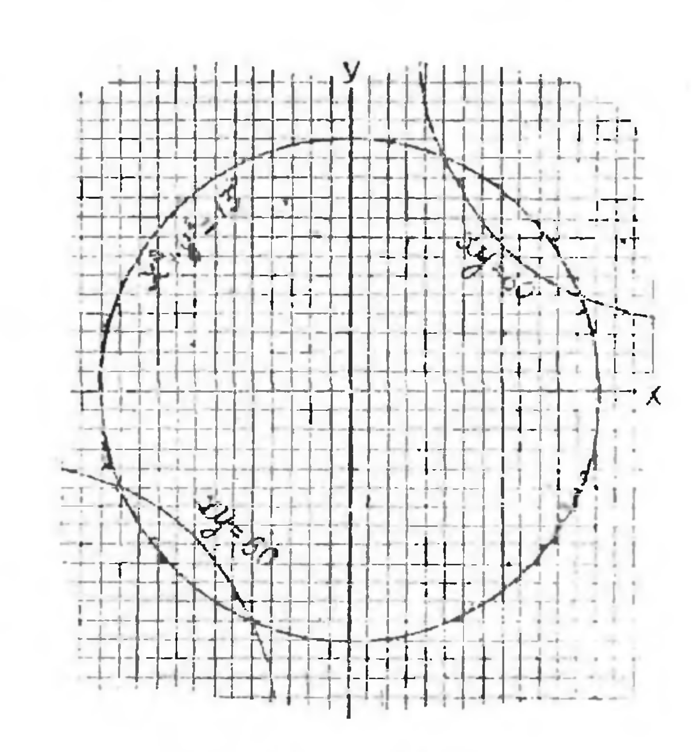
[1]) Следует заметить, что Декарт никогда не употреблял слов „положительный“ и „отрицательный“. Вместо отрицательного числа, он говорит, „ложное число“ (nombre faux) (Géometrie, III).

Эта идея Декарта оказалась в высшей степени богатой по своим последствиям.

Для того, чтобы еще яснее стал метод координат, изобретенный Декартом, заметим следующее:

Как известно, для наглядного представления зависимости между двумя величинами прибегают к „графикам".

На прилагаемом здесь чертеже мы имеем графику (фиг. 14) цен одного килограмма платины за время 1880—1910 г. По ординатам отложена стоимость 1 килограмма в марках. Это случай „незакономерной" кривой; ее нельзя записать уравнением. (фиг. 14).



Фиг. 13.

„Закономерная" кривая может быть записана уравнением.

Метод, изобретенный Декартом, позволяет решать систему у-ния графически [1]) (фиг. 13).

Все, что мы до сих пор сказали о *„Геометрии"* Декарта, поясняет нам, почему III-ья часть его трактата посвящена теории уравнений.

В настоящее время изучить кривую — значит исследовать то уравнение, которое эту кривую записывает.

При изучении свойств у-ния Декарт всегда приводит его к виду, в котором правая часть O.

Любопытно, как открывает Декарт, что всякое у-ние имеет столько корней, сколько единиц в показателе его наивысшей степени.

Пусть $x = 2$; $x = 3$.

Тогда $x - 2 = O$; $x - 3 = O$

перемножая, имеем $(x - 2)\ (x - 3) = O$

$$x^2 - 5x + 6 = O$$

Если $x = 4$, то $x - 4 = O$ и

$$(x - 4)\ (x^2 - 5x + 6) = O \text{ или}$$

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 - O.$$

[1]) Графическое решение системы уравнений

$$x^2 + y^2 = 13^2$$

$$xy = 60$$

Точки пересечения кривых (5,12); (12,5); (—5,—12); (—12,—5) суть корни уравнения.

Получили у-ние третьей степени; корни его: 2, 3 и 4 (три корня).

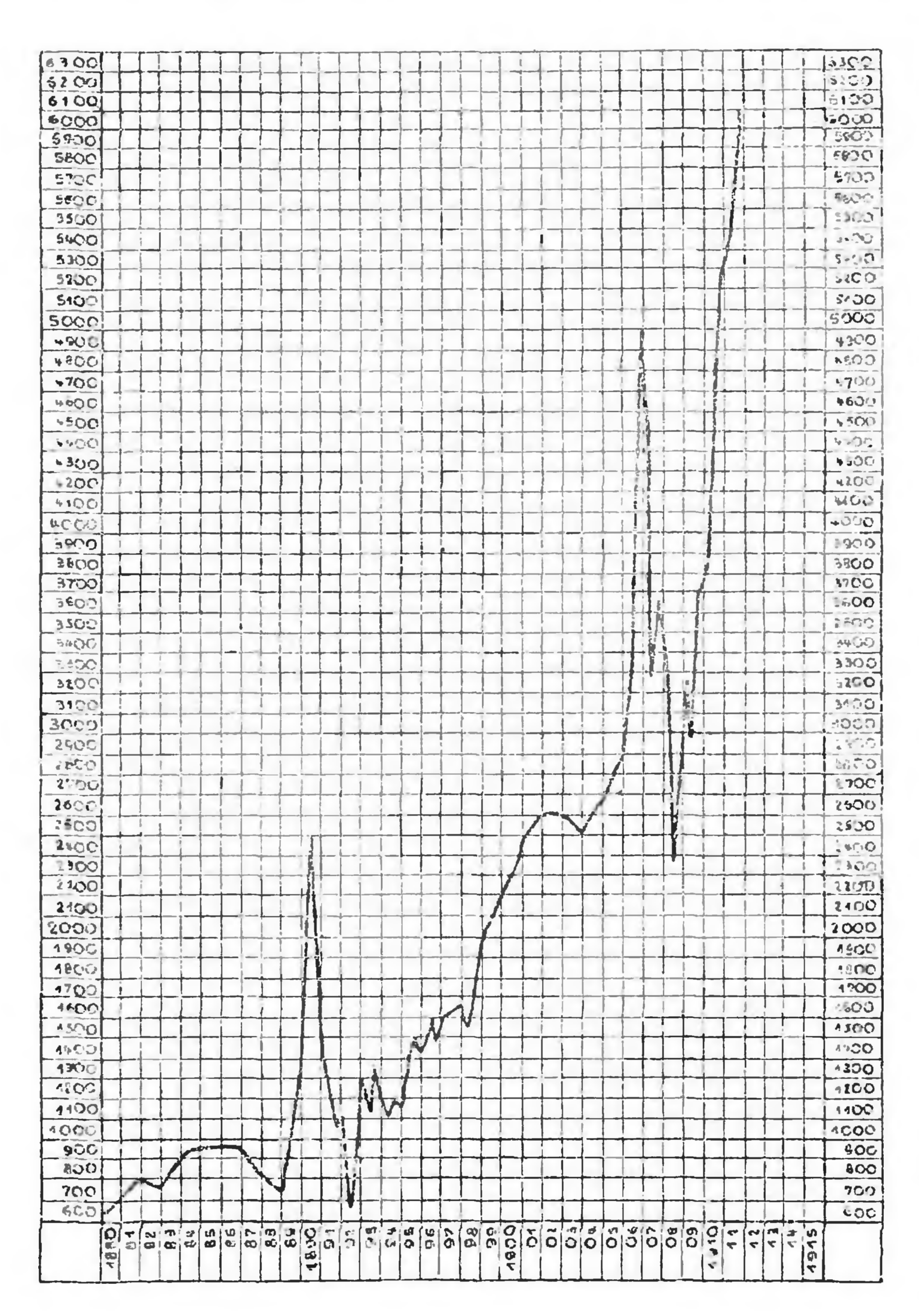
„Очевидно,—говорит Декарт,—что правая часть у-ния, имеющего несколько корней, всегда делится без остатка на бином, состоящий из неизвестного x минус величина одного из положительных корней, которого бы то ни было, или плюс значение одного из отрицательных корней; таким делением можно понизить степень уравнения. Обратно, если первая часть у-ния не может разделиться на бином, состоящий из неизвестного + или — некоторое другое количество, оно не представляет значения ни одного из корней уравнения. Так, у-ние

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$$

делится на

$(x-2)$; $(x-3)$; $(x-4)$; и $(x+5)$,

но не делится на $x+$ . . . какое-либо другое количество; это показывает, что оно не может иметь других корней, кроме 2, 3, 4 и -5.



Фиг. 14.

Графическое представление изменения цены платины в марках за 1 kgr. (1880 г.—1910 г.).

Декарт дает *правило*, позволяющее по виду уравнения определить, сколько положительных и отрицательных корней имеет данное у-ние.

Подводя итог всему сказанному нами о Декарте, следует отметить еще раз то исключительное положение, которое занял алгебраический анализ благодаря Декарту.

Значение алгебры расширилось. Отрицательные решения у-ний получили толкование; алгебра стала наглядной, так как стало возможным многие системы решать графически; в свою очередь роли алгебры и геометрии переменились. Если арабский математик требовал для занятий алгеброй знания Евклида, Аполлония и др., то

изучение аналитической геометрии стало возможным только при основательном знании алгебры.

Между алгеброй — анализом, с одной стороны, и геометрией, с другой, устанавливается замечательный параллелизм.

14. „Arithmetica Universalis“ Исаака Ньютона.

В Вестминстерском аббатстве, в Лондоне, стоит на могиле великого Ньютона памятник, на котором сделана латинская надпись. Вот русский перевод этой надписи:

„Здесь покоится
Сэр Исаак Ньютон,
Который почти божественною силой своего ума
Впервые об'яснил,
Помощью своего математического метода,
Движения и формы планет,
Пути комет, приливы и отливы океана.
Он первый исследовал разнообразие световых лучей
И проистекающие отсюда особенности цветов,
Каких до того никто даже и не подозревал.
Прилежный, проницательный и верный истолкователь
Природы, древностей и Священного Писания,
Он прославил в своем учении величие Всемогущего Творца.
Требуемую Евангелием простоту он дополнял своей жизнью.
Пусть смертные радуются тому, что в их среде
Жило такое украшение человеческого рода.
Родился 25 декабря 1642 г., умер 20 марта 1727 г.“.

Эта надпись кратко говорит нам о тех открытиях, которые сделал Ньютон. Ньютон был одинаково хороший математик, как и физик, механик и астроном. Имя его придется не раз вписывать в историю различных отделов точной науки. В этом очерке мы будем говорить о роли Ньютона в истории алгебры.

Свой трактат по алгебре Ньютон назвал „Arithmetica Universalis“, что значит „Всеобщая арифметика“.

Как об'яснить такое название?

„Arithmetica Universalis"

Исаака Ньютона.

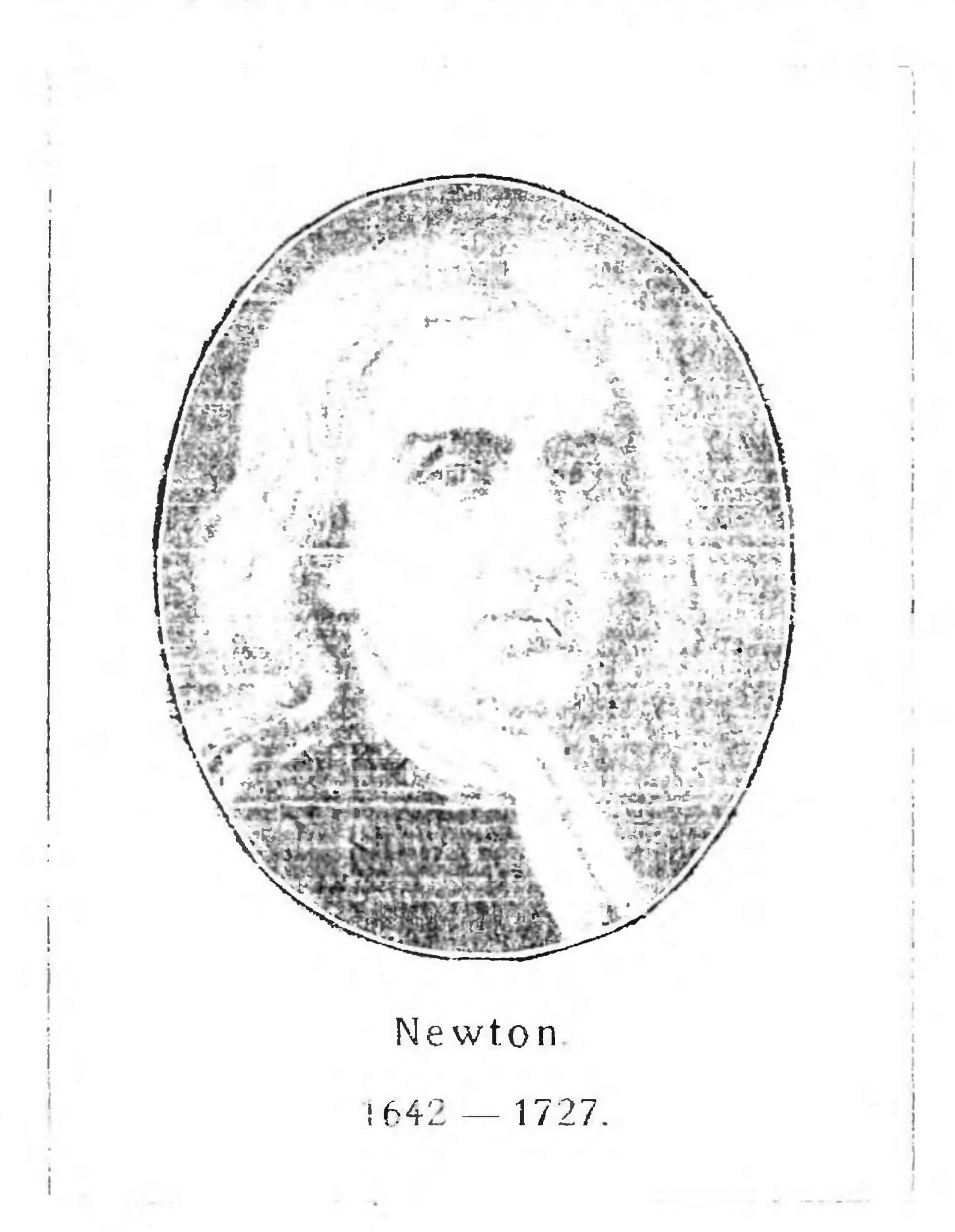
Перевод оглавления „Всеобщей Арифметики" Ньютона.

Числа в скобках обозначают число страниц отдела по французскому переводу „*Arithmétique Universele*". 1802. Paris. Первое издание 1707 г. написано на латинском языке.

Ответ на этот вопрос мы находим у самого Ньютона.

„В арифметике, говорит он, вопросы решаются только путем перехода от данных величин к искомым. Алгебра следует часто обратному порядку—от количеств искомых она переходит к количествам данным, с целью придти так или иначе к заключению, или уравнению, из которого можно было бы искомые определить.

Таким именно приемом разрешаются трудные вопросы, которые не по силам одной арифметике. Однако, арифметика настолько необ-



Newton

1642 — 1727.

ходима во всех алгебраических операциях, что только слияние этих наук образует науку о счислении. Именно по этой причине я излагаю их вместе“.

Это обещание Ньютон проводит довольно последовательно.

Все действия рассматриваются им на частных примерах, сначала числовых, потом буквенных.

Ньютон смотрит на алгебру, как на метод, удобный для решения задач, и потому не приводит никаких доказательств, считая их излишними.

В качестве примера можно привести интересный метод, который

предлагает Ньютон для разложения многочленов на множителей. Он дает правило [1]):

„Если многочлен, будучи разделен на простых делителей, оказывается составным, и есть сомнение, что он имеет делителей, расположите его тогда по убывающим степеням какой-либо буквы и подставляйте вместо этой буквы три или более члена арифметической прогрессии: 3, 2, 1, 0,—1,—2. Вы получите столько же различных значений многочлена, которые напишете рядом с прогрессией.

„Выставьте всех делителей этих значений, как положительных, так и отрицательных. Сравните теперь делителей, которые находятся в одной строке, с делителями других строк, чтобы видеть, не составляют ли они арифметическую прогрессию. Для этого напишите с самых больших, чтобы переходить к меньшим, следуя тому же порядку прогрессии 3, 2, 1, 0,—1,—2.

„Если такая прогрессия окажется с разностью единицы или прогрессия, разность которой делитель коэффициента старшего члена, напишите эту прогрессию в том же порядке, как первую, помещая каждый член ее рядом со строчкой, из которой он взят. То значение, которое будет соответствовать 0 первой нашей прогрессии, будучи разделено на разность выписанной последней прогрессии и присоединено к букве, вместо которой мы делали подстановку, образует искомый делитель“.

Ньютон поясняет это правило на примерах.

1. $x^3 - x^2 - 10x + 6$ имеет делителя $x + 3$.

Действительно, подставляем вместо x 1, 0,—1. Получаем: 4, 6, 14. Выписываем рядом делителей их. Прогрессию образуют 4, 3 и 2 [2]).

1	4	1, 2, **4**,	+4	
0	6	1, 2, **3**, 6	+3	. . . . . $x + 3$.
—1	14	1, **2**, 7, 14	+2	

2. $6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20$ имеет делителя $(y + \frac{4}{3})$ или $(3y + 4)$.

Правило Ньютона дает таблицу:

2	30	1, 2, 3, 5, 6, **10**, 15, 30	+10	
1	7	1, **7**	+ 7	
0	20	1, 2, **4**, 5, 10, 20	+ 4	. . . $y + \frac{4}{3}$.
—1	3	**1**, 3	+ 1	
—2	34	1,—**2**, 17, 33	— 2	

---

[1]) Чтобы скорее понять это правило, необходимо с ним познакомиться на примерах, которые приведены ниже.

[2]) Они выделены жирным шрифтом.

Это правило Ньютон нигде не об'ясняет, почему оно приводит нас к цели.

Теоремы о равносильности у—ний Ньютон дает, как правила.

Всего 7 правил [1]). Никакого доказательства справедливости этих правил не приводится.

„Если дано у—ние

$$15b^2 = 24ab + 3bx,$$

то, говорит Ньютон, можно разделить у—ние на b, потом на 3“ получим

$$5b = 8a + x; \quad x = 5b - 8a$$

Известными нам приемами у—ние:

$$\frac{ax}{a - x} + b = x \ . \ . \ . \ . \ .$$

Ньютон приводит к у—нию:

$$x^2 = bx - ab.$$

Уравнение:

$$\sqrt{a^2 - ax} + a = x$$

Ньютон приводит к у—нию:

$$x^2 - ax = 0 \text{ и говорит } x = a.$$

В алгебре Ньютона мы встречаем впервые способы исключения неизвестных из системы. Он указывает два способа: 1) способ сравнения неизвестных, 2) способ подстановки.

Вот один из примеров Ньютона.

Пусть даны у—ния $a + x = b + y; \ 2x + y = 3b$.

Если мы хотим исключить y, то из 1-го у—ния мы имеем:

$$a + x - b = y,$$

а из второго:

$$3b - 2x = y,$$

---

[1]) Интересно, что, следуя этим правилам у—ние $3(x - 1) = 2(x - 1)$ можно сократить на $(x - 1)$ и получить $3 = 2$. Раскрывая скобки, мы бы получили у—ние 1-ой степени: $x = 1$.

откуда

$$a + x - b = 3b - 2x,$$

$$x = \frac{4b - a}{3}.$$

Очень ценные указания дает Ньютон о составлении уравнений.

„Чтобы привести вопрос к у—нию, следует все условия выразить алгебраически, подобно тому, как мы это делаем, выражая наши мысли при помощи букв алфавита“.

Данныя, переведенные на алгебраический язык, дадут столько уравнений, сколько требуют условия вопроса“.

Например, если требуется найти три числа, образующих непрерывную пропорцию, сумма которых 20, а сумма их квадратов 140, то я назову эти три неизвестных числа: x, y и z.

Вопрос с обыкновенного языка на язык алгебраический переводится следующим образом:

Вопрос записанный на обыкновен. языке.	*Тот же вопрос на языке алгебры.*
Требуется найти три числа, которые удовлетворяют след. условиям:	x, y, z
1°. Образуют непрерывную пропорцию.	$x : y = y : z$ . . . . (1)
2°. В сумме дают 20.	$x + y + z = 20$ . . . . (2)
3°. Сумма их квадратов составляет 140.	$x^2 + y^2 + z^2 = 140$ . . . . . (3)

„Купец имел известную сумму денег,	x
из которой он расходует в течение первого года 100 фунтов.	$x - 100.$
Он умножает остаток на одну треть.	$x - 100 + \frac{x - 100}{3}$ или $\frac{4x - 400}{3}$
След. год он расходует 100 фунтов.	$\frac{4x - 400}{3} - 100$ или $\frac{4x - 700}{3}$

И умножает остаток на одну треть.

$$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9} \text{ или } \frac{16x-2800}{9}$$

Подобным же образом он расходует 100 фунтов в третий год.

$$\frac{16x-2800}{9}-100 \text{ или } \frac{16x-3700}{9}$$

Умножает остаток на одну треть.

$$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27} \text{ или } \frac{64x-14800}{27}$$

И состояние его увеличивается вдвое против прежнего“.

$$\frac{64x-14800}{27}=2x$$

Вопрос приведен к уравнению

$$\frac{64x-14800}{27}=2x$$

из которого $x=1480$“.

„Вы видите отсюда, что для решения вопросов, которые относятся к числам или отвлеченным отношениям величин, требуется только перевести задачу с родного языка на язык алгебраический“.

После указаний о методах составления у—ний, Ньютон решает 77 задач. Решение задач занимает едва ли не половину всего сочинения. Первые 16 примеров—обычные задачи нашей алгебры: нахождение чисел, удовлетворяющих определенному условию, задачи на движение, работу, смесь и т. п.

Интересна *задача № 11*.

Площади трех лугов равны соответственно $3\frac{1}{3}$, 10 и 24 (десят.).

На всех трех лугах трава имеет одинаковую высоту и растет равномерно с одинаковою скоростью. Первый луг прокормил 12 быков в продолжение четырех недель, второй — 21 быка в течение 9 недель.

Сколько быков может прокормить третий луг в течение 18 недель?

Ньютон сперва решает эту задачу в общем виде.

Приводим решение этой задачи. Пусть искомое число быков есть x; количество травы на одной ед. площади (десят.) — y; количество увеличения ее за неделю z.

На первом лугу $y \cdot 3\frac{1}{3}$ травы $(\frac{10}{3}y)$; за неделю она вырастает на $z \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 4$ $(\frac{40}{3}z)$. Полное количество травы, с'еденной 12 быками

за 4 недели:

$$\frac{10}{3}y+\frac{40}{3}z$$

В одну неделю 1 бык с'едал $\frac{10\,(y+4z)}{3\,.\,4\,.\,12}$.

Подобным же образом найдем количество травы, с'еденной на 2-м лугу и на третьем:

$$\frac{10\,(y+9z)}{9\,.\,21} \quad \text{и} \quad \frac{24\,(y+18z)}{18\,.\,x}.$$

Получаем два уравнения:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{5\,(y+4z)}{72}=\dfrac{10\,(y+9z)}{189} \\[2ex] \dfrac{5\,(y+4z)}{72}=\dfrac{4\,(y+18z)}{3x} \end{array}\right|$$

Из них исключаем сначала x и определяем отношение $\frac{y}{z}=12$ тогда $x=36$.

Третий луг может прокормить 18 быков.

Примеры второй группы (61 задача)—геометрического и физического содержания. Иллюстрацией этих задач может служить:

Задача № 50. Определить глубину колодца по звуку при ударе камня о дно.

Решение. Если обозначить a расстояние, которое проходит камень во время b, а через d—время, потребное звуку чтобы пройти тот же путь a, то

(время падения)^2 : $b^2=x:a$ (по закону падения тел)

(время, потребное пройти звуку): $d=x:a$

Откуда: время падения $\sqrt{\frac{b^2x}{a}}=b\sqrt{\frac{x}{a}}$.

Время, потр. пройти зв. $\frac{dx}{a}$.

Если наблюдаемое время от начала падения до удара о дно t, то у—ние будет таково: $t=b\sqrt{\frac{x}{a}}+\frac{dx}{a}$.

Отдел, посвященный решению задач, Ньютон заканчивает следующим замечанием:

„Я показал выше решение нескольких задач. Ибо при изучении наук примеры полезнее правил“.

Остальная часть сочинения Ньютона посвящена вопросам, входящим обыкновенно в курс высшей алгебры. Этих вопросов мы коснемся в других очерках.

Символическая сторона алгебры Ньютона вполне современная.

Своим авторитетом Ньютон закрепил те условные знаки, которые были введены его предшественниками. Приводим таблицу, из которой читатель узнает авторов символистики современной алгебры.

Современные знаки	Кто ввел впервые.	Примечания.
+ и —	Widmann. 1389. Stifel. 1544.	
(.) Точка как знак умножения.	Harriot. 1631.	Никакого знака не ставил между двумя буквами при умножении Stifel.
:	Leibniz. 1684.	„Черту“ как знак деления употребляли индусы и арабы и—через Леонардо Фибоначи — начали употреблять итальянские математики.
$\sqrt{}$	Rudolff. 1525. Stifel. 1544.	„R“ писали Пачиоли, Кардан и др.
$\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$	Newton. 1707.	
x, x^3, x^4. . .	Descartes. 1637.	Знак для обозначения неизвестного был особенно разнообразен.
=	Recorde. 1567.	Recorde пишет: „Я поставлю пару параллельных =, ибо никакие два предмета не могут быть более равны“
> и <	Harriot. 1631.	
Скобки.	Girard. 1629.	Ньютон, Маклорен и др. вместо скобок ставили черту над многочленом.

ВЫПИСКИ.	Современная запись.
16 census et 2000 aequales 680 rebus. (*Regiomontanus.* 1464).	$16x^2 + 2000 = 680x.$
3 co . p . 4 ce . m . 5 cu . p . 2 cece . p 2 ce m . 6 n. (*Lucas Pacioli.* 1494).	$3x^2 + 4x^2 - 5x^3 + 2x^4 - 6.$
Cubus *p* 6 rebus aequales 20). (*Cardan.* 1545).	$x^2 + 6x = 20.$
$2\ \breve{2}\ m\ 20\ \breve{1}\ p\ 22.$ (*Bombelli.* 1572).	$2x^2 - 2x + 22.$
$1\ \textcircled{2} + 5\ \textcircled{1} - 4\ \textcircled{0}.$ (*Stevin.* 1585).	$x^2 + 5x - 4.$
$1C - 8Q + 16N$ aequ. 40. (*Vieta.* 1591).	$x^3 - 8x^2 + 16x = 40.$
A cubus + *B* plano 3 in *A* aequari *Z* solido 2. (*Vieta.* 1591).	$x^3 + 3bx = 2c.$
$1\ \textcircled{3}\ x\ 13\ \textcircled{1} + 12.$ (*Girard.* 1629).	$x^3 - 13x + 12.$
$aaa - 3bba = 2ccc.$ (*Harriot.* 1631).	$a^3 - 3ab^2 = 2c^3.$
$Z^3 - 9zz + 26z - 24 \infty 0.$ (*Descartes.* 1637).	$z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0.$
$x^3 * - bbx + c^3 \infty 0.$ (*Descartes.* 1637).	$x^3 - b^2x + c^3 = 0.$
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$ (*Newton.* 1707).	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$

Коллекция алгебраических записей из различных трактатов по алгебре.

15. Трактат по алгебре Маклорена.

Появившаяся в 1748 г. книга Маклорена [1]) *„A. Treatise of Algebra“* представляет высокий интерес, т. к. здесь мы видим уже следующую стадию в развитии систематического курса алгебры.

Достаточно сравнить оглавление алгебры Ньютона (стр. 55) с содержанием алгебры Маклорена, чтобы видеть большую стройность в расположении материала.

[1]) **Маклорен** (Colin **Maclaurin**) родился в 1698 г. умер в 1746 г.

A

TREATISE

OF

ALGEBRA

IN

THREE PARTS

CONTAINING

I. *The Fundamental Rules and Operations.*

II. *The Composition and Resolution of Equations of all Degrees: and the different Affections of their Roots*

III *The Application of* Algebra *and* Geometry *to each other*

To which is added an

APPENDIX,

Concerning the general Properties of GEOMETRICAL LINES.

By *COLIN MACLAURIN*, M. A.

Late PROFESSOR of MATHEMATICS in the University of *Edinburgh* and *Fellow* of the *Royal Society*.

LONDON:

Printed for A. MILLAR, and J. NOURSE opposite to *Catherine Street*, in the *Strand*.

M.DCC.XLVIII

Титульный лист алгебры *Маклорена* 1748 года.

Геометрическая часть „*Универсальной арифметики*“ Ньютона в алгебре Маклорена уже отделилась, чтобы стать современной „Аналитической геометрией“ (III-ая часть). Отделы алгебры (I и II-ая части) Маклорена уже вполне современны [1]).

Если Ньютон еще смотрит на алгебру, как на метод для решения задач, то Маклорен, хотя и излагает алгебру, как *совокупность правил*, все же прибегает уже к доказательствам, пытаясь обосновать многие правила. Мы сейчас увидим, однако, что не всегда эти доказательства удачны. Все же это уже в сравнении с алгеброй Ньютона—шаг вперед.

Так, например, правило знаков при умножении Маклорен доказывает следующим образом:

„По определению $+a-a=0$; поэтому, если мы помножим $+a-a$ на n, произведение должно равняться 0, т. к. один из множителей 0. Первый член произведения $+na$. Поэтому второй член должен быть $-na$, так как только тогда все произведение равно 0. Таким образом $-a$, умноженное на $+n$ дает $-na$“.

„Подобным же образом, если мы умножим $+a-a$ на $-n$, первый член произведения будет $-na$, второй же $+na$, т. к. они оба должны уничтожать один другого. Таким образом, $-a$, умноженное на $-n$ дает $+na$“ [2]).

Правила действия над дробями Маклорен „доказывает“, как у нас теперь принято. Напр. формулу

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

он доказывает следующим образом.

$$„\text{Пусть } \frac{a}{b}=m;\ \frac{c}{d}=n.\ \text{Тогда } ^{3)}\ a=bm;\ c=dn \text{ и } bdmn=ac$$

или
$$mn=\frac{ac}{bd},\ \text{т. е. } \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

что $a^{\circ}=1$, Маклорен „доказывает“:

$$„\text{Очевидно, что } \frac{a}{a}=a^{1-1}=a^{\circ},\ \text{но } \frac{a}{a}=1,\ \text{поэтому } a^{\circ}=1.$$

---

[1]) 1-ая часть—это наш курс элементарной алгебры.

[2]) Чтобы видеть всю неосновательность этого доказательства, достаточно задать себе вопрос: „а что значит умножить на отрицательное число?“. См. вып. III.

[3]) Любопытно, что Маклорен, как и во всех наших руководствах, не договаривает, какое число надо подразумевать под m и n. И, если идет речь об алгебраических дробях, то что надо разуметь под m и n.

A Treatise of Algebra Maclaurin'a.

СОДЕРЖАНИЕ.

Часть I.

Часть II.

Часть III.

Содержание трактата по алгебре Маклорена.
1748.

В общем, все доказательства Маклорена, как мы видим, больше действуют на убеждение, т. е. на психологический элемент нашего мышления, чем на логический.

В методическом отношении многие места алгебры Маклорена— шедевр. Так например, квадратные уравнения он решает не так, как это часто у нас принято; он не подставляет коэффициенты в готовую формулу. Нет, его метод—начать с простейшего, и постепенно усложнять задачу, сначала решить численный пример, потом буквенный.

Так, решение у-ний 1-ой степени он об'ясняет последовательно на примерах:

$$5x+50=4x+56$$

$$ax=b$$

$$ax+2ba=3cc$$

Об'яснение решения квадратного у-ния Маклорен начинает с примера (правило 5-ое) [1])

$$x^2+6x+9=20$$

Здесь левая часть есть точный квадрат. Поэтому

$$x+3=\pm\sqrt{20}$$

$$x=\pm\sqrt{20-3}$$

Квадратное у—ние:

$$y^2-ay+3a^2=0.$$

Маклорен решает следующим образом: переносим $3a^2$ в правую часть:

$$y^2-ay=-3a^2$$

Прибавляем $\frac{a^2}{4}$ к обеим частям

$$y^2-ay+\frac{a^2}{4}=-3a^2+\frac{a^2}{4}=-\frac{11a^2}{4}.$$

Откуда, после извлечения кв. корня

$$y-\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{11a^2}{4}};\text{ или } y=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{11a^2}{4}}.$$

---

[1]) Следует заметить, что общих приемов для решения уравнения у Маклорена нет. Он дает, например, 8 правил решений для различных видов уравнения 1-ой степени.

Вот еще образец решения:

$$„y^2 + 12 = 8y$$

$$y^2 - 8y = -12.$$

„Прибавляем кв. 4; $y^2 - 8y + 16 = -12 + 16 = 4$“.
„Извлекаем кв. корень; $y - 4 = \pm 2$.
„Откуда: $y = 4 \pm 2 = 6$ или 2“.

Показав непосредственным извлечением корня, что

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \ldots ,$$

Маклорен получает тот же ответ, развертывая $(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ по формуле бинома Ньютона, которая, как известно, пишется:

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2 + \ldots$$

При $a = x^2$, $b = x^2$, $m - \frac{1}{2}$ получим тот же ответ.

Как мы уже сказали, многие формулы Маклорен демонстрирует сначала на частном примере, а потом переходит к общему.

Так, например, показав, что приближенное значение $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ можно получить извлекая приближенно $\sqrt{2} = 1,41421$, а затем вычислив $\sqrt{3 + 2.\ 1,41421}$, Маклорен замечает:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \overline{1+\sqrt{2}}\ ^{1)},\ \text{т. к.}$$

$$\overline{1+\sqrt{2}} \times \overline{1+\sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

Поэтому тот же ответ 2,41421 можно получить скорее.

Показав применимость этого способа в общем случае, Маклорен применяет формулу, известную еще индусам,

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

к случаю : $\sqrt{-1+\sqrt{-8}}$.

Здесь : $A = -1$; $B = -8$.

$$A^2 - B = 9$$

[1]) Маклорен скобок не употреблял, а пользовался чертою вверху.

Поэтому

$$\sqrt{-1+\sqrt{-8}} = 1+\sqrt{-2}$$

Мы не касаемся других отделов алгебры Маклорена, т. к. надеемся вернуться к нему в одном из следующих очерков по истории алгебры.

---

16. „Универсальная арифметика Леонгарда Эйлера“.

Леонгард Эйлер [1]) нас русских должен интересовать особенно, т. к. большую часть своей плодотворной деятельности он провел в Петербурге.

По своему таланту Эйлер может быть поставлен рядом с лучшими, когда-либо жившими математиками и естествоиспытателями. Ему мы обязаны обоснованием почти всех ветвей чистой математики.

Сохранилось предание, что та книга, о которой мы будем здесь говорить: „*Универсальная Арифметика*“ была записана под диктовку [2]) простым мальчиком, портным, вывезенным из Берлина в качестве слуги и не имевшего до того времени ни малейшего понятия о математике—такою ясностью и последовательностью мысли проникнуто это произведение. Записанная на немецком языке в 1767 г., она появилась в переводе на русский язык в том же году, под заглавием: „*Универсальная арифметика*“ Г. Леонгарда Эйлера, *переведенная с немецкого подлинника студентами Петром Иноходцевым и Иваном Юдиным.*

Немецкий подлинник вышел из печати только в 1770 г., французский—с очень ценными примечаниями Лагранжа в 1774 г.

„*Универсальная Арифметика*“ Эйлера состоит из пяти частей.

---

[1]) Leonhard Euler (1707—1783) родился в Базеле, умер в Петербурге. Учителем его был знаменитый Иван Бернулли, друзьями Даниил и Иван Бернулли. Свою научную деятельность Эйлер начал в 1733 г. в Петербурге. С 1741 по 1766 жил в Берлине. В 1766 г. снова был приглашен в Петербург, где оставался до самой смерти. В 1768 г. Эйлер потерял зрение, однако лучшие его труды появились именно в этот период его жизни. Эйлер умер в 1783 г.

[2]) Эйлер уже ослеп в это время.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АРИѲМЕТИКА

Г. Леонгарда Ейлера,

переведенная съ Нѣмецкаго подлинника
Студентами Петромъ Иноходцовымъ
и Иваномъ Юдинымъ.

ТОМЪ ПЕРВЫЙ

содержащій въ себѣ всѣ образы
алгебраическаго вычисленія.

Вторымъ тисненіемъ

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ,
при Императорской Академіи Наукъ
1787 года.

Титульный лист 2-го издания „Универсальной Арифметики" *Эйлера.*
Первое издание появились въ 1767 году.

В первой части изложена арифметика целых и дробных чисел, из'ясняются знаки $+$ и $-$, квадратные корни и производящие оттуда „*неизвлекомые*“ числа, „*невозможные*“ или мнимые числа, степени, и как можно из'явить неизвлекомые числа в ломанных показателях“. Конец этой части посвящен логарифмам и действиям над ними.

Вторая часть составляет алгебру. Здесь говорится о сложении, вычитании, умножении, делении, возвышении в квадрат и извлечении кв. корня из „составных количеств“ (многочленов), о разрешении дробей и неизвлекомых степеней в бесконечные ряды, о разрешении отрицательных степеней.

Третья часть посвящена пропорциям и прогрессиям.

Четвертая часть содержит теорию и практику уравнений.

Пятая часть составляет „неопределенную аналитику“.

Алгебра Эйлера, как мы видим уже не содержит в себе геометрии. По расположению материала это систематический курс. В отличие от алгебры Маклорена, „правила“ отсутствуют. Все изложение поражает читателя своей простотой и ясностью.

О том, как решаются задачи при помощи составлении у—ний, Эйлер показывает на примерах. Вот один из них: „20 человек: мущины и женщины вместе едят в трактире, мущина платит 8 грош., а женщина 7 грош. вся же сумма денег, которую они хозяину заплатили, делает 6 талеров; спрашивается, сколько мущин и сколько женщин в том числе было?“

„Для решения сего вопроса положи число мущин $= x$, и поступай с ними так, как с известным количеством, то есть, как будто бы хотел опробовать решится ли заданный вопрос, ежели число мущин положится x, когда же мущины и женщины вместе делают 20 человек, то можно отсюда определить и число женщин, которое выдет ежели число мущин вычтется из 20, почему число женщин $= 20 - x$. Каждый мущина платит 8 грошей, следов. x мущин заплатят $8x$ грошей. Каждая женщина платит 7 грошей, то $20 - x$ женщин заплатят $140 - 7x$ грош. Следовательно мущины и женщины вместе заплатят $140 + x$ грош.; а мы знаем, сколько они истратили, то есть 6 реихсталлеров, которые в грошах делают 144, чего ради будем мы иметь сие уравнение $140 + x = 144$, откуда ясно видно, что $x = 4$.

И так в трактире было 4 мущины и 16 женщин“ (§ 567).

Вот некоторые интересные выдержки из алгебры Эйлера.

Вопрос о вычитании многочленов трактуется следующим образом:

„А что бы вычитание действительно совершить, то во первых примечать должно, что ежели из одного количества a другое положительное $+b$ вычтется, то получится остаток $a - b$, естьли же

отрицательное число как $-b$ должно будет вычесть, то выйдет $a+b$, ибо долг вычитать то же есть самое, как бы нечто дать". (§ 264).

Умножение отрицательных чисел, Эйлер об'ясняет довольно своеобразно: показав, что произведение $-a$ на 3 или $+3$ дает $-3a$ („понеже $-a$ за долг принять можно" и этот долг надо взять слагаемым три раза), Эйлер переходит к умножению двух отрицательных чисел:

„Осталось теперь только упомянуть, говорит он, о следующем случае: когда — умножаться будет на —, или $-a$ на $-b$, при чем, во-первых известно, что произведение в разсуждение литер будет ab; но должно ли к тому придать знак $+$ или $-$, о том сказать не можно, то только известно, что один из оных знаков, или тот или другой быть должен. Но теперь вопрошаю, не может ли быть тут знак —? понеже $-a$ умноженное на $+b$ дает $-ab$, следовательно $-a$ умноженное на $-b$ не может тоже дать, что дает $-a$ на $+b$, но должно из того вытти противному, а именно $+ab$. Из сего следующее происходит правило: — умноженный на — дает $+$ подобно как и $+$ умноженный на $+$". (§ 33).

Как решаются квадратные у—ния Эйлер об'ясняет на примерах, а потом в общем виде, при чем трудность этих примеров постепенно усложняется.

В высшей степени просто изложен отдел о кубичных уравнениях. Начав с неполного у—ния, вида $x^3=a$, Эйлер затем переходит к у—ниям полным, которые имеют рациональный корень. Здесь при решении Эйлер пользуется сначала свойствами коэффициентов и корней.

Так как у—ние $x^3-x-6=0$, говорит он, „никакого другого рационального корня не имеет, кроме того, на который последний член 6 делится, то пробу чинить надлежит с сими только числами 1, 2, 3, 6.

которые пробы стоят в таком порядке:

I) когда $x=1$, то будет $1-1-6=-6$;

II) когда $x=2$, то будет $8-2-6=0$;

III) когда $x=3$, то будет $27-3-6=18$;

IV) когда $x=6$, то будет $216-6-6=204$.

Отсюда усматриваем мы, что $x=2$ есть корень предложенного уравнения, из коего уже оба другие легко найти можно; ибо когда $x=2$ есть корень, то $x-2$ будет множитель уравнения..."

Далее Эйлер рассматривает, как можно преобразовать многие кубичные у—ния, приводя их к простейшему и удобному виду. Только

в конце он дает формулу Кардана. Такая же постепенность изложения наблюдается относительно уравнении 4 ой степени [1]).

Остается указать еще на некоторые особенности алгебры Эйлера.

Непосредственно деление 1 на $1-a$ приводит автора *„Универсальной Арифметики“* к бесконечным рядам (§ 289)

$$\frac{1}{1-a}=1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7\ .\ .\ .\ .$$

„и о сем бесконечном ряду, говорит Эйлер, с достоверностью утверждать можно, что он столь же велик, как и дробь $\frac{1}{1-a}$“.

Любопытно, что Эйлер не доказывает сходимость этого ряда, т. е. он не доказывает что сумма его не равна бесконечности. Как известно, например, ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\ .\ .\ .\ .\ \text{до безк.}$$

не сходящийся: сумма его членов превосходит всякое конечное число.

Между тем в других своих работах Эйлер неоднократно настаивал на необходимости доказывать сходимость бесконечных рядов.

К условному равенству $a^0=1$, Эйлер подводит читателя, пользуясь постоянством формальных законов, повидимому, не отдавая ясного отчета в этом.

Образовав геометрическую прогрессию:

$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ a^8,\ a^9\ \text{и проч.}$$

Эйлер говорит (§ 175):

„В сем ряду каждый член найдется, когда его предыдущий на a помножится, через что показатель единицею увеличится: так из каждого члена найдется его предыдущий, когда он разделится на a, через что указатель уменьшится единицею. Отсюда видим мы, что перед a^1 стоящий член должен быть $\frac{a}{a}$, т. е. 1, а с показателем a^0; из чего сие свойство чисел следует, что a^0 всегда должно быть 1, как бы число a велико или мало ни было, да хотя бы a 0 равно было, потому что 0^0 без сомнения делает 1“.

Продолжая этот ряд влево, Эйлер представляет его двояко:

$$\frac{1}{a^6},\ \frac{1}{a^5},\ \frac{1}{a^4},\ \frac{1}{a^3},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a},\ 1,\ a\ .\ .\ .$$

$$a^{-6},\ a^{-5},\ a^{-4},\ a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^0,\ a^1\ .\ .\ .$$

и таким образом вводит отрицательный показатель.

---

[1]) Вопросу об истории у—ний 3-й и 4-й степени будет посвящен отдельный очерк.

Это внутреннее свойство человеческой природы следовать принципу перманентности формальных законов приводит Эйлера даже к ошибке.

„Как $\sqrt{a}$ умноженное на $\sqrt{b}$ дает $\sqrt{ab}$, говорит он, так $\sqrt{-2}$, умноженное на $\sqrt{-3}$, даст $\sqrt{6}$; равным образом $\sqrt{-1}$ множенный на $\sqrt{-4}$, даст $\sqrt{4}$, т. е. 2". (§ 148). В действительности

$$\sqrt{-2}\,.\,\sqrt{-3} = -\sqrt{6}$$

$$\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-4} = -2.$$

Формула $\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ оказывается неприменимой для мнимых чисел.

В заключение нашего, может быть не достаточно яркого изображения всех особенностей алгебры Эйлера, мы должны признать, что его „*Универсальная арифметика*"—крупный вклад в математическую учебную литературу. Она оказала несомненно свое плодотворное влияние на развитие математического образования в России. Для русских это был первый систематический курс по алгебре, доступно написанный. В этом одна из заслуг Эйлера перед русской наукой.

17. Заключение.

Описанием „Универсальной арифметики" Эйлера, мы заканчиваем этот очерк. Как по внутреннему содержанию, так и с внешней стороны алгебра Эйлера вполне современная.

В этом очерке мы касались не всех отделов алгебры. Еще много имен участвовавших в изобретении этой науки придется назвать нам, рассказывая историю других составных частей алгебры.

Здесь мы имели в виду проследить только главные моменты в ее развитии.

Вступив в ряды точных наук довольно поздно, алгебра долго не могла проявить свою самостоятельность, являясь частью арифметики или принимая чуждый себе геометрический характер. Только математики конца XVII столетия Viéte, Descartes и Newton закончили работу своих предшественников.

В конце своей „Универсальной Арифметики“ Ньютон говорит:

„Я не всегда присоединял доказательства, ибо они слишком легки, чтобы была в них нужда, а иногда их нельзя было бы изложить без чрезмерных длиннот“.

Это является характерной чертой алгебры XVIII и даже XIX столетия.

Мы видели, насколько мало удачными оказались доказательства Маклорена и Эйлера.

Обоснование алгебры—выделение основных законов счета, определений и аксиом,—так сравнительно строго проведенное в геометрии Евклида, в алгебре было возможно только в XIX столетии.

ОГЛАВЛЕНИЕ.